Графи

Богдан Ківва 30bohdan@gmail.com

Теорема Ейлера: В планарному графі з $|V|$ вершинами, $|E|$ ребрами та $|F|$ гранями виконано: $|V|+|F|-|E|=2$.

Теорема Турана: Нехай граф G не містить повного $k+1$ підграфа. Тоді, в графі G ребер не більше ніж в графі з такою ж кількістю вершин, в якому вершини розбито на k груп, так що кількості вершин в двох різних групах відрізняються не більш як на одну, та довільні 2 вершини з різних груп з'єднані, а довільні 2 вершини з однієї групи – ні.

Теорема Холла: Нехай є m хлопців та n дівчат. Деякі хлопці знайомі з деякими дівчатами. Кожному хлопцю можна поставити у відповідність знайому дівчину (кожному свою) тоді і лише тоді, коли для довільної групи з k хлопців кількість дівчат знайомих принаймні з одним із них не менша ніж k, і так для довільного k.

Теорема Форда-Фалкерсона: для мережі $G(V,E)$ з потоком f наступні умови рівносильні:

1) потік f максимальний
2) пропускна здатність мінімального перерізу рівна величині потоку f
3) в графі G_f немає доповнюючого шляху.

Теорема Менгера: Зафіксовано граф G та вершини u,v. Нехай при видалені довільних $k-1$ ребра (вершин) в графі залишається шлях з u в v. Тоді, існує k шляхів, що не мають спільних ребер (вершин).

Теорема Кьоніга: На клітчатій дошці розташовано декілька тур. Тоді найбільша кількість тур, що не б'ють одна одну, рівна найменшому числу ліній (рядків або стовпців), що покривають дані тури.

Теорема Келі: Зафіксовано n пронумерованих вершин. Тоді, кількість різних дерев побудованих на них рівна n^{n-2}.

Теорема Уітні: Нехай задано граф G. Позначимо через $\chi(t)$ кількість правильних розфарбувань графа G в t кольорів. Тоді $\chi(t)$ - многочлен від t степеня $|G|$.

Теорема Брукса: Нехай d - максимальна степінь вершини в графі G, $d \geq 3$. Тоді граф G можна правильно пофарбувати в d кольорів, якщо G - не повний граф на $d+1$ вершині.

Розминка:

1) Нехай d - максимальна степінь вершини в графі G, тоді граф G можна правильно пофарбувати в $d+1$ колір.

2) Довести, в планарному графі на n вершинах не більше як $3n-6$ ребер.

3) Ребра повного графа на 17 вершинах пофарбовано в 3 кольори. Довести, що знайдеться трикутник одного кольору.

4) Довести, що в довільному неорієнтованому графі можна поставити на ребрах стрілки так, щоб в кожній вершині модуль різниці кількостей ребер, що входять та тих, що виходять з неї, був не більшим за 1.

5) Нехай $S=\{1,2,3,\dots,kn\}$ та є 2 розбиття $S=A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_n=B_1\cup\dots\cup B_n$, де $|A_i|=|B_i|=k$, $\forall i$. Довести, що існує набір розміру n, такий що $|T\cap A_i|=|T\cap B_i|=1$.

Задачі:

1) На графі дозволено таку операцію: Обрати довільний цикл довжини 4 вибрати довільне ребро в ньому та видалити. Для фіксованого $n\geq 4$ знайти найменшу кількість ребер, яка може лишитись після виконання цих операцій з повним графом на n вершинах.

2) Доведіть, що в довільному повному орієнтованому графі непарна кількість гамільтонових циклів.

3) В дводольному графі $2^n - 1$ вершина, в кожній написано n різних чисел. Довести, що в кожній вершині можна лишити одне число так, щоб кожне ребро з'єднувало різні числа.
4) В графі $3n$ вершин, вони розбиваються на 3 кліки по n вершин. При цьому немає кліки на $n+1$ вершині. Довести, що вершини можна правильно пофарбувати в $[5n/3]$ кольорів.

5) Множина S вершин графа домінуюча, якщо для довільна вершина графа або на лежить S, або має сусіда в S. Чи існує граф з парним числом домінуючих множин?
6) Відомо, що довільні 2 трикутники в графі мають спільну вершину і немає 5-кліки. Довести, що можна видалити 2 вершини і при цьому знищити всі трикутники.
7) Двоє по-черзі фарбують ребра деякого зв'язного графа: перший - червоним, другий - синім кольором. Другий виграє, якщо синій граф зв'язний. Довести, що у нього є виграшна стратегія тоді і лише тоді, коли граф містить 2 зв'язних ребернонеперетинних підграфа, кожен з яких містить стільки ж вершин як і початковий граф.
8) Вершини графа розбиті на декілька n-клік, назвемо їх шарами. Простий цикл графа назвемо важливим, якщо він містить не більше 2 вершин з 1 шара. Виявилось, що кожне ребро що з'єднує вершини з різних шарів покрито не більш як $n-2$ важливими непарними циклами. Довести, що вершини можна правильно розфарбувати в n кольорів.
9) Дано зв'язний граф, який лишається зв'язним при видаленні довільного ребра і довільні 2 вершини зв'язані ребром або мають спільного сусіда. Чи правда, що ребра графа можна пофарбувати в 4 кольори так, щоб між довільними двома вершинами знайшовся шлях всі ребра якого різнокольорові?
10) Степені всіх вершин графа непарні. Довести, що через довільне ребро проходить парна кількість гамільтонових циклів.
11) В кожній клітині клітчатої площини проведено діагональ. Довести існує вершина з якої можна дійти по проведених діагоналях принаймні до 100500 інших.
13) Гуманітарії та математики вирішили пограти в теніс. Стіл лише 1, гум-ів - n, мат-ків - m. $m \neq n$. Вони вирішили грати так: спочатку за стіл стають 1 мат. та 1 гум. ; всі інші стаютьв спільну чергу, після кожної гри учень, що перший стоїть у черзі замінює свого однокласника за столом а той стає в кінець черги. Довести, що рано чи пізно кожен математик зіграє з кожним гуманітарієм.
14) В змаганні беруть участь m учасників, яких судять n суддів, $n \geq 3$. Кожен суддя кожному учаснику ставить + або -. Виявилось, що довільна пара суддів виставила однакові оцінки щонайбільше k учасникам. Довести, що $\frac{k}{m} \geq \frac{n-1}{2n}$.
15) В місті Непарному n мешканців. В ньому є декілька клубів. В кожному клубі непарна кількість людей. Виявилось, що довільні 2 клуби містять непарну кількість спільних членів. Яка найбільша кількість клубів в Непарному?
16) 21 дівчина та 21 хлопець прийняли участь у змаганні. Відомо, що кожен учасник розв'язав не більше 6 задач і для кожної пари: дівчини та хлопця була задача розв'язана обома. Довести, є задача, яку зробили принаймні 3 дівчини та 3 хлопця.
17) На математичному змаганні було запропоновано 6 задач, та кожні 2 задачі зробило не менше $2/5$ всіх учасників. Ніхто не зробив всі 6 задач. Довести є принаймні 2 учасника, що зробили рівно 5 задач.
18) Є n людей у кожного є своя новина. Коли один телефонує іншому вони обмінюються всіма новинами, які знають. Через яку найменшу кількість дзвінків всі зможуть взнати всі новини.
19) В графі розмір найбільшої кліки парний. Довести, що всі вершини можна розбити на 2 групи так, щоб розміри найбільших клік в кожній групі були однаковими.
21) Для графа G: $f(G)$ - кількість трикутників в ньому, $g(G)$ - кількість тетраедрів в G. Знайти найменше c, що $g(G)^3 \leq cf(G)^4$, для довільного графа G.

22) Нехай G - граф на n вершинах з мінімальною степеню вершини $\delta > 1$. Тоді G має домінуючу множину на не більш як $n(\frac{1+\ln(\delta+1)}{\delta+1})$ вершині.