Нерівності

1) Нехай a,b,c - сторони трикутника. Довести,
   $a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\ge 0$.
2) Нехай a,b,c - сторони трикутника з площею S. Довести, $a^2+b^2+c^2\ge 4\sqrt{3}S$ (Нерівність Вітзенбока+ Imo 1961#2)
3) Нехай додатні числа задовольняють $\frac{1}{1+a^4}+\frac{1}{1+b^4}+\frac{1}{1+c^4}+\frac{1}{1+d^4}=1$. Довести,
   $abcd\ge 3$.
4) Нехай додатні числа задовольняють $xyz=x+y+z$ Довести, що
   $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\le\frac{3}{2}$
5) Нехай додатні числа задовольняють $a^2+b^2+c^2+abc=4$. Довести,
   $0\le ab+bc+ac-abc\le 2$
6) Нехай додатні числа задовольняють $abc=1$. Довести,
   $\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(a+c)}+\frac{1}{c^3(b+a)}\ge\frac{3}{2}$
7) Для чисел більших 1 виконано $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$. Довести,
   $\sqrt{x+y+z}\ge\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}$
8) Довести $\frac{x_1}{1+x_1{}^2}+\frac{x_2}{1+x_1^2+x_2^2}+.....+\frac{x_n}{1+x_1^2+..+x_n^2}<\sqrt{n}$.
9) $\sqrt{(a^2b+b^2c+c^2a)(ab^2+bc^2+ca^2)}\ge abc+\sqrt[3]{(a^3+abc)(b^3+abc)(c^3+abc)}$,
   де всі змінні додатні.
10) Для чисел більших 1 довести нерівність $\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+...+\frac{1}{1+x_n}\ge\frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1...x_n}}$
11) Для невід'ємних чисел з сумою 1 довести нерівність $\frac{1+x_1}{x_1}\frac{1+x_2}{x_2}...\frac{1+x_n}{x_n}\ge(n+1)^n$
12) Для додатніх чисел довести $\sqrt{\frac{a+b}{c}}+\sqrt{\frac{b+c}{a}}+\sqrt{\frac{a+c}{b}}>2$
13) Для додатніх довести $(a+\frac{1}{b}-1)(b+\frac{1}{c}-1)(c+\frac{1}{a}-1)\le(\frac{1+abc}{2\sqrt{abc}})^3$
14) Для додатніх довести $(1+\frac{a}{b})(1+\frac{b}{c})(1+\frac{c}{a})\ge 2(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}})$
15) Довести $(a_1+a_2+..+a_n)(a_1^7+a_2^7+..+a_n^7)\ge(a_1^3+..+a_n^3)(a_1^5+..+a_n^5)$ для додатніх чисел.
16) $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=1$. Довести $(\frac{a}{a+b})^2+(\frac{b}{b+c})^2+(\frac{c}{c+a})^2\ge\frac{1}{4(a+b+c)}$.
17) Для додатніх $a+b+c=1$. Довести $\frac{a}{\sqrt{b+c}}+\frac{b}{\sqrt{a+c}}+\frac{c}{\sqrt{a+b}}\ge\sqrt{\frac{3}{2}}$.

18) Для додатніх довести $\sqrt{\frac{2a}{a+b}}+\sqrt{\frac{2b}{b+c}}+\sqrt{\frac{2c}{c+a}}\le 3$

19) Для додатніх $a+b+c=1$. Довести

$$\frac{a}{\sqrt{b^2+3c}}+\frac{b}{\sqrt{c^2+3a}}+\frac{c}{\sqrt{a^2+3b}}\ge\frac{1}{\sqrt{1+3abc}}$$

20) Для додатніх довести $\sqrt{x(y+1)}+\sqrt{y(z+1)}+\sqrt{z(x+1)}\le\frac{3}{2}\sqrt{(x+1)(y+1)(z+1)}$.