Теорема Ейлера–2 + показники

Теорема Ейлера. Якщо $(a, m) = 1$, то $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$.

Означення. Нехай $(a, m) = 1$. Число Δ — називається показником числа a за модулем m, якщо Δ — найменше натуральне число таке, що $a^{\Delta} \equiv 1 \pmod{m}$.

Лема. Якщо $a^n - 1 \equiv 1 \pmod{m}$, то $\Delta \mid n$.

1. Яку остачу при діленні на 85 дає число $13^{13^{13}} + 16^{16^{16}}$?
2. Довести, що число $2^{3^n} + 1$ ділиться на 3^{n+1} і не ділиться на 3^{n+2}.
3. Довести, що для будь-якого натурально числа t існує таке натуральне число n, що $s(n) = t$ і $t \mid n$. ($s(n)$ — сума цифр числа n).
4. Довести, що якщо n — непарне, то $n!! \mid 2^{n!} - 1$. ($n!! = n \cdot (n-2) \cdot (n-4) \cdot \ldots$).
5. Довести, що для будь-якого $m \in \mathbb{N}$ існує нескінченна кількість натуральних чисел n таких, що $m \mid (n, 2^n - 1)$.
6. Нехай $a \in \mathbb{N}$. Довести, що $n \mid \varphi(a^n - 1)$.
7. Довести, що при всіх $n \in \mathbb{N}$
$$30^n \mid 19^{3 \cdot 30^{n-1}} - 17^{5 \cdot 30^{n-1}}.$$
8. Знайти усі непарні $n \in \mathbb{N}$ такі, що $n \mid 3^n + 1$.

Для тих, хто не дуже робив попереднє дз...

1. Довести, що для усіх $k \in \mathbb{N}$ існує $n \in \mathbb{N}$ таке, що $2^n - 1$ має принаймні k простих дільників.
2. Довести, що для усіх $n \in \mathbb{N}$ число $19 \cdot 8^n + 17$ не є простим. `(Я теж не знаю, до чого тут теорема Ейлера).`
3. Довести, що для будь-якого простого p існує нескінченна кількість чисел виду $2^n - n$, що діляться на p.
4. Чи буде простим число $257^{1092} + 1092$?
5. Довести, що $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ ділиться на 133.
6. Знайдіть усі натуральні n, для яких $n2^n + 1$ ділиться на 3.
7. Послідовність $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ визначається так: $a_1 = 2, a_2 = 3, a_{n+2} = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$. Знайти a_{2012}.
8. Доведіть мультиплікативну властивість для $\tau(n)$ — кількості натуральних дільників числа n. Тобто, що, якщо $(m, n) = 1$, то $\tau(mn) = \tau(m)\tau(n)$