Занятие 3

Задача 1 Два многочлена p и q с действительными коэффициентами принимают целочисленные значения в одних и тех же точках. Доказать, что $p-q$ либо $p+q$ есть константа.

Задача 2 (1) Пусть $P(x)$ — целозначный многочлен. Определим последовательность $a_k = (-1)^{P(k)}$, $k \geqslant 1$. Докажите, что $\{a_k\}$ периодична, причём период — некоторая степень 2.
(2) Пусть последовательность $\{a_k,\ k \geqslant 1\}$ ($a_k = \pm 1$) периодична и период — некоторая степень 2. Доказать, что существует целозначный $P(x)$, для которого $a_k = (-1)^{P(k)}$, $k \geqslant 1$.

Задача 3 Пусть $f(z), g(z) \in \mathbb{C}[z]$, $d_1 = \deg(f)$, $d_2 = \deg(g)$. Предположим, что $\max_{|z|=1} |f(z)| = \max_{|z|=1} |g(z)| = 1$ ($|z| = 1$ — окружность в комплексной плоскости с центром в 0, радиуса 1). Определим $d = d_1 + d_2$. Доказать, что $\max_{|z|=1} |f(z)g(z)| > 2^{-2d}$.

Задача 4 Пусть m, n натуральные. Доказать, что следующие условия равносильны:

(1) существуют целые числа $a_0, \ldots, a_n$, такие, что $GCD(a_0, \ldots, a_n, m) = 1$ (наибольший общий делитель), и значения многочлена $a_n x^n + \ldots + a_0$ при всех $x \in \mathbb{Z}$ делятся на m,

(2) $\dfrac{n!}{m}$ целое.

Задача 5 Пусть $R(x)$ — рациональная функция (отношение двух многочленов с комплексными коэффициентами), принимающая целые значения при всех достаточно больших x. Докажите, что $R(x)$ — целозначный многочлен.

Задача 6 Пусть $P(x_1, \ldots, x_n)$ — многочлен от переменных $x_1, \ldots, x_n$, имеющий по переменной x_i степень d_i. Предположим, что P принимает целые значения при $x_1 = a_1, a_1+1, \ldots, a_1+d_1$; $x_2 = a_2, a_2+1, \ldots, a_2+d_2$; $\ldots$, $x_n = a_n, a_n+1, \ldots, a_n+d_n$, где $a_1, \ldots, a_n$ некоторые целые числа. Докажите, что

$$P(x_1, \ldots, x_n) = \sum c_{k_1, \ldots, k_n} \binom{x_1}{k_1} \ldots \binom{x_n}{k_n},$$

где все $c_{k_1}, \ldots, c_{k_n}$ целые. В частности, такой многочлен принимает целые значения при всех целых $x_1, \ldots, x_n$.

Задача 7(q-аналог целозначных многочленов) Биномиальным коэффициентом Гаусса, или q-биномиальным коэффициентом называется

$$\binom{n}{k}_q = \frac{(q^n-1)\ldots(q^{n-k+1}-1)}{(q^k-1)\ldots(q-1)}.$$

Докажите, что $\binom{n}{k}_q \to \binom{n}{k}$ при $q \to 1$. Докажите, что аналогом равенства $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$ является равенство

$$\binom{n+1}{k}_q = \binom{n}{k}_q + \binom{n}{k-1}_q q^{n-k+1}.$$

Далее считаем, что $q \geqslant 2$ натуральное, $n \geqslant k \geqslant 1$. Докажите, что тогда $\binom{n}{k}_q$ целое.

Определим последовательность полиномов $f_0, f_1, \ldots$ так: $f_0 = 1$,

$$f_k(x) = q^{-k(k-1)/2} \frac{(x-1)(x-q)\ldots(x-q^{k-1})}{(q-1)(q^2-1)\ldots(q^k-1)},\ k \geqslant 1.$$

Проверьте, что $f_k(q^n) = 0$ при $n = 0, 1, \ldots, k-1$, $f_k(q^k) = 1$. Кроме того, $f_k(q^n) = \binom{n}{k}_q$ при $n \geqslant k$. Таким образом, для всех $n \geqslant 0$ число $f_k(q^n)$ целое. Докажите следующую теорему:

Теорема 0.1. *Многочлен $P(x)$ степени не выше k принимает целые значения в точках $x = 1, q, \ldots, q^k$ тогда и только тогда, когда*

$$P(x) = c_0 + c_1 f_1(x) + \ldots + c_k f_k(x),$$

где числа $c_0, c_1, \ldots, c_k$ целые. В частности, такой многочлен принимает целые значения при $x = q^n$, $n \geqslant 0$.

Задача 8(Обобщенные биномиальные коэффициенты) Пусть $A_1, A_2, \ldots$ — последовательность натуральных чисел, причём для всех m, n $(A_n, A_m) = A_{(m,n)}$. Докажите, что обощенные биномиальные коэффициенты

$$A_k^n = \frac{A_n A_{n-1} \ldots A_{n-k+1}}{A_k A_{k-1} \ldots A_1},\ n \geqslant k$$

целые. Подумайте над аналогичной задачей, когда $A_k = A_k(x)$ — многочлены от x.

Задача 9 Докажите, что следующие последовательности удовлетворяют условию задачи 8:

(1) $A_n = n$,
(2) $A_n = q^n - 1$, где натуральное $q \geqslant 2$,
(3) $A_n = F_n$ — число Фибоначчи. Считаем, что $F_1 = F_2 = 1$.
(4) Пусть $P(x)$ — полином с целыми коэффициентами, $P(x) \geqslant 1$ при целом $x \geqslant 0$. Определим $A_0 = 0$, $A_{n+1} = P(A_n)$, $n \geqslant 0$.
(5) $A_k(x) = x^k - 1$, $k \geqslant 1$.

Задача 10 Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — различные комплексные числа, полином $P(x)$ даёт остаток b_k при делении на $x - a_k$, $k \geqslant 1$. Найти остаток $P(x)$ от деления на $(x - a_1) \ldots (x - a_n)$.