Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Інститут інноваційних технологій і змісту освіти

LII Всеукраїнська учнівська олімпіада з математики

Вказівки до розв'язання задач

Другий день

8.5. Знайдіть усі такі пари додатних раціональних чисел x і y, що обидва числа $x+\frac{1}{y}$ і $y+\frac{1}{x}$ є натуральними. Відповідь обґрунтуйте.

Розв'язання. Нехай $x=\frac{m}{n}$, $y=\frac{p}{q}$, де m, n, p, q — натуральні числа, причому $(m;n)=(p;q)=1$. Оскільки $mp+nq \,\vdots\, np$, то $mp \,\vdots\, n$, $nq \,\vdots\, p$, а тому $p \,\vdots\, n$ і $n \,\vdots\, p$. Маємо, що $n=p$. Аналогічно доводиться, що $m=q$. Звідси тепер випливає, що $2m \,\vdots\, n$ і $2n \,\vdots\, m$. Отже, $m, n, p, q \in \{1;2\}$. Тепер уже неважко одержати відповідь.

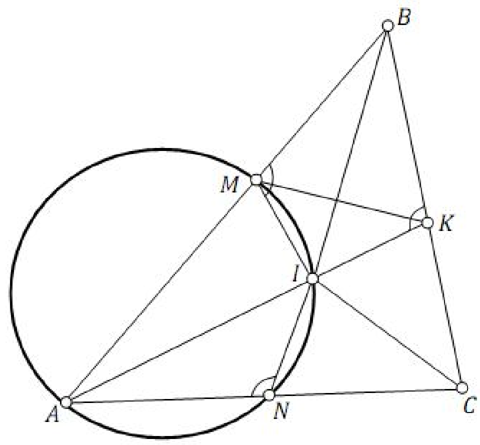
Відповідь: $(1;1)$, $\left(2;\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2};2\right)$.

8.6. Нехай $[x]$ — ціла частина числа x (тобто найбільше ціле число, яке не перевищує x), $\{x\}=x-[x]$ — дробова частина числа x. Розв'яжіть рівняння $\{x\}^2+2\{x\}=3x^2$.

Розв'язання. Оскільки $0\le\{x\}<1$, то $x^2<1$, тобто $-1<x<1$. Якщо $x\in[0;1)$, то $x=\{x\}$, і знаходимо $x=0$. Для $x\in(-1;0)$ позначимо $u=\{x\}$, $0<u<1$, $[x]=-1$, $x=-1+u$. Тоді з рівняння $2u^2-8u+3=0$, з урахуванням нерівності $0<u<1$, одержуємо $u=2-\frac{\sqrt{10}}{2}$, $x=1-\frac{\sqrt{10}}{2}$.

Відповідь: $1-\frac{\sqrt{10}}{2}$; 0.

8.7. Нехай точка I — центр вписаного кола трикутника ABC. На стороні AB обрано таку відмінну від вершин точку M, що $BM<BC$, причому описане коло трикутника AMI перетинає сторону AC в точці N, яка не співпадає з точками A і C. Доведіть, що $BM+CN=BC$.



Розв'язання. Візьмемо на стороні BC таку точку K, що $BM=BK$. Легко бачити, що $\triangle BMI=\triangle BKI$. Оскільки навколо чотирикутника $ANIM$ можна описати коло, і $\angle MAI=\angle NAI$, то $MI=NI=KI$.

Маємо:

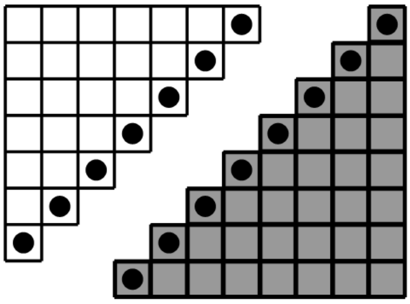
$$\angle BKI = \angle BMI = 180^\circ - \angle AMI = \angle ANI,\ \angle CNI = \angle CKI.$$

З того, що $\angle NCI = \angle KCI$, випливає рівність кутів CIN і CIK. Отже,

$$\triangle CNI = \triangle CKI,\ CN = CK,\ BM + CN = BK + KC = BC.$$

8.8. Нехай $n \geq 3$ — задане натуральне число. На клітчастій дошці розміром $n \times n$ (кожна клітинка є квадратом розміром 1×1) усі клітинки діагоналі, що сполучає лівий нижній кут з правим верхнім кутом дошки, а також усі клітинки, які лежать під цією діагоналлю, пофарбовані чорним кольором. Решта клітинок дошки пофарбовані білим кольором. На скільки прямокутників може виявитися розрізаною частина дошки, утворена всіма чорними клітинками, якщо всю дошку розрізано по лініях сітки на $2n$ клітчастих прямокутників так, що кожен із прямокутників складається тільки з клітинок якогось одного кольору (до прямокутників відносяться й квадрати будь-яких розмірів)? Відповідь обґрунтуйте.

Розв'язання. Нехай біла частина шахівниці розрізана на p прямокутників, а чорна — на q. Аналогічно тому, як зображено на рисунку для $n = 8$, на білій частині відмітимо $n-1$ клітинку, а на чорній — n клітинок. Кожному з прямокутників розрізання відповідної частини належить не більше однієї відміченої в цій частині клітинки, і тому $p \geq n-1$, $q \geq n$. З урахуванням рівності $p + q = 2n$ легко отримати, що $p = n-1$ і $q = n+1$, або ж $p = n$ і $q = n$. Для кожного $n \geq 3$ неважко навести розрізання і з $q = n$, і з $q = n+1$.



Відповідь: на n прямокутників або ж на $n+1$ прямокутник.

9.5. Нехай для додатних дійсних чисел x і y має місце рівність

$$x^2 + y^2 + \frac{8xy}{x+y} = 16.$$

Доведіть, що $x + y = 4$.

Розв'язання. Задана рівність рівносильна таким співвідношенням:

$$(x^2 + y^2)(x+y) + 8xy = 16(x+y),$$

$$\left((x+y)^2 - 2xy\right)(x+y) - 16(x+y) + 8xy = 0,$$

$$(x+y)^3 - 16(x+y) - 2xy(x+y) + 8xy = 0,$$

$$(x+y)\left((x+y)^2 - 16\right) - 2xy(x+y-4) = 0,$$

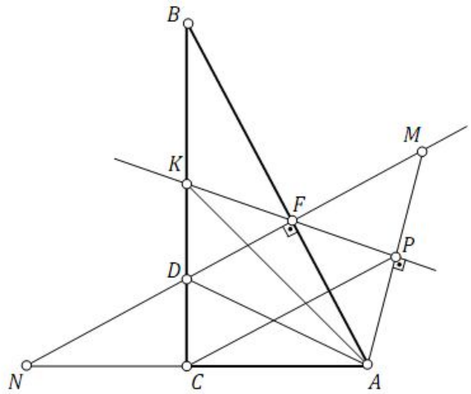
$$(x+y)(x+y-4)(x+y+4) - 2xy(x+y-4) = 0,$$

$$(x+y-4)\left((x+y)(x+y+4) - 2xy\right) = 0.$$

Для $x > 0$ та $y > 0$ $(x+y)(x+y+4) - 2xy = x^2 + y^2 + 4(x+y) > 0$.

9.6. Дано трикутник ABC, в якому $\angle C = 90°$, $AC < BC$. На стороні BC відмічено таку точку K, що $CK = CA$. Нехай D — така точка відрізка CK, що $\angle DAK = \angle BAK$. Відрізок DF є висотою трикутника ADB, а точка P — основою перпендикуляра, проведеного з точки A до прямої FK. Доведіть, що $CP = \frac{1}{2}\left(AF + FD + DA\right)$.

Розв'язання. Нехай пряма DF перетинає прямі AC і AP в точках N і M відповідно (нескладно довести, що такі точки перетину існують). Нехай $\angle BAC = \alpha$, $\alpha > 45°$, $\angle BAK = \angle KAD = \delta$. Тоді $\angle FDB = \alpha$, $\angle NDC = \alpha$.



Далі, $\alpha - \delta = 45°$, $90° - \alpha + 2\delta = \alpha$, а тому $\angle ADC = \alpha$. Звідси випливає, що точка C — середина відрізка AN. Оскільки промінь AK — бісектриса внутрішнього кута A трикутника FDA, а промінь DK — бісектриса його зовнішнього кута при вершині D, то промінь FK є бісектрисою його зовнішнього кута при вершині F. Тому FP — медіана трикутника MFA. Отже, CP є середньою лінією трикутника AMN, і $CP = \frac{1}{2}NM$. Залишається врахувати, що $ND = AD$ і $AF = FM$.

9.7. Нехай a і b такі натуральні числа, що число $\frac{a^4 - 1}{b+1} + \frac{b^4 - 1}{a+1}$ є цілим. Доведіть, що $a^{2010}b^{2012} - 1$ ділиться без остачі на $a+1$.

Розв'язання. Якщо виконується умова задачі, і принаймні одне з чисел a, b дорівнює 1, то твердження є очевидним.

Нехай $a > 1$ і $b > 1$. Позначимо $\frac{a^4 - 1}{b+1} = \frac{x}{y}$, $\frac{b^4 - 1}{a+1} = \frac{z}{t}$, де x, y, z, t — натуральні числа, причому $(x; y) = (z; t) = 1$. За умовою задачі, сума $\frac{x}{y} + \frac{z}{t} = m$ є цілим числом, тобто $xt + yz = myt$. З цієї рівності випливає, що $y \vdots t$ і $t \vdots y$ Отже, $y = t$. Оскільки добуток

$$\frac{x}{y} \cdot \frac{z}{t} = \frac{a^4 - 1}{b+1} \cdot \frac{b^4 - 1}{a+1} = (a-1)(b-1)\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right) = k$$

також є цілим числом, то $y = t = 1$, бо $(x; y) = (z; t) = 1$. Звідси випливає, що $b^4 - 1$ ділиться без остачі на $a+1$. Звідси одержуємо, що $b^{2012} - 1 \vdots a+1$. Позаяк $a^{2010}b^{2012} - 1 = a^{2010}\left(b^{2012} - 1\right) + \left(a^{2010} - 1\right)$, і числа $b^{2012} - 1$ і $a^{2010} - 1$ діляться без остачі на $a+1$ (ми враховуємо, що $a^{2010} - 1 = \left(a^2\right)^{1005} - 1$ ділиться без остачі на

a^2-1), то $a^{2010}b^{2012}-1 \vdots a+1$, що й треба було довести (можна також було й скористатися властивостями конгруенцій).

Зауваження. Оскільки сума та добуток чисел $u=\dfrac{a^4-1}{b+1}$ і $v=\dfrac{b^4-1}{a+1}$ є цілими числами, то u і v — раціональні корені зведеного квадратного рівняння з цілими коефіцієнтами, а тому, як відомо, числа u і v — цілі.

9.8. У країні Олімпії 2012 міст, деякі з котрих сполучаються між собою прямими авіалініями (кожною авіалінією сполучаються між собою тільки два міста, причому будь-які два міста сполучені не більше, ніж однією авіалінією). Відомо, що кожне місто сполучається прямими авіалініями щонайбільше з 8 іншими містами. Доведіть, що в країні можна закрити не більше за 2012 авіаліній так, щоб серед будь-яких чотирьох міст хоча б два не сполучалися між собою прямою авіалінією.

Розв'язання. Нехай G — граф задачі. Розіб'ємо множину його 2012 вершин на три підмножини A, B і C так, щоб сума S кількостей ребер підграфів $G(A)$, $G(B)$ і $G(C)$ була мінімальною (зрозуміло, що це можливо). Припустимо, що в одній з підмножин (нехай це буде підмножина A) є така вершина X, що в підграфі $G(A)$ її степінь $\rho_{G(A)}(X)\geq 3$. Оскільки $\rho_G(X)\leq 8$, то вершина X не може сполучатись з кожним з підграфів $G(B)$ і $G(C)$ більше, аніж двома ребрами. Нехай вершина X з підграфом $G(B)$ сполучається щонайбільше двома ребрами. Тоді для підграфів $G(A\setminus\{X\})$, $G(B\cup\{X\})$ і $G(C)$ сума S зменшується, що неможливо. Отже, в підграфах $G(A)$, $G(B)$ і $G(C)$ степінь усіх їхніх вершин не перевищує 2. Як відомо, у кожному графі сума степенів усіх верших дорівнює подвоєній кількості ребер, а тому в кожному з підграфів $G(A)$, $G(B)$ і $G(C)$ кількість ребер не більше кількості вершин, тобто $S\leq 2012$. Видалимо всі ці S ребер (зробимо графи з множинами вершин A, B і C *порожніми*). Для будь-яких чотирьох вершин принаймні дві лежать в одній з цих трьох множин вершин, і після видалення ребер такі дві вершини не сполучаються ребром.

10.5. Розв'яжіть рівняння $x+\sqrt{1-x}+1=\sqrt{x}+3\sqrt{x-x^2}$.

Розв'язання. Областю допустимих значень рівняння є відрізок $[0;1]$. Запишемо рівняння у вигляді

$$\left(\sqrt{x}\right)^2+\sqrt{1-x}+\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(\sqrt{1-x}\right)^2-\sqrt{x}-3\sqrt{x}\sqrt{1-x}=0.$$

Розкладаючи ліву частину рівняння на множники, одержуємо:

$$\left(\sqrt{x}-\sqrt{1-x}\right)\left(2\sqrt{x}-\sqrt{1-x}-1\right)=0.$$

Залишається розв'язати стандартними методами рівняння

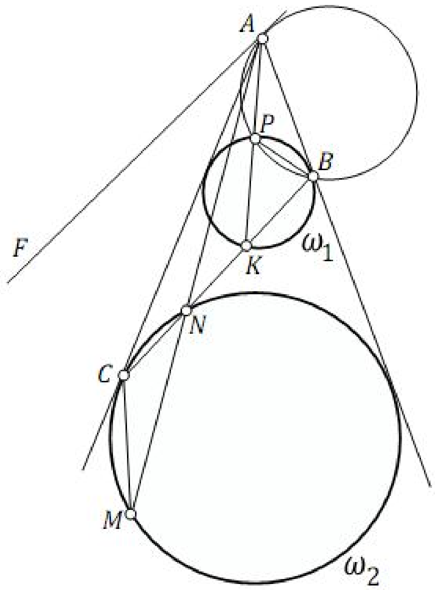
$$\sqrt{x}-\sqrt{1-x}=0,\ 2\sqrt{x}=\sqrt{1-x}+1.$$

Відповідь: $\frac{1}{2}$; $\frac{16}{25}$.

10.6. Про додатні дійсні числа a і b відомо, що $a+b+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=5$. Доведіть, що $3\sqrt{a+b}\ge a+b+2$.

Розв'язання. Нехай $u=a+b$ і $v=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$. Тоді $u+v=5$. Як відомо, $uv\ge 4$. Тому $5=u+v\ge u+\frac{4}{u}$. Звідси випливає, що $u^2-5u+4\le 0$. Отже, $1\le\sqrt{u}\le 2$, тобто $\left(\sqrt{u}-1\right)\left(\sqrt{u}-2\right)\le 0$, і $3\sqrt{u}\ge u+2$.

10.7. У кут BAC вписано два кола ω_1 і ω_2, які не мають спільних точок, причому $B\in\omega_1$, $C\in\omega_2$, і радіус кола ω_1 менший за радіус кола ω_2. Пряма BC вдруге перетинає кола ω_1 і ω_2 в точках K і N відповідно. Прямі AK і AN проходять, відповідно, через точки $P\in\omega_1$ і $M\in\omega_2$, відмінні від K і N. Доведіть, що точка A лежіть на прямій, що проходить через центри описаних кіл трикутників ACM і ABP.



Розв'язання. Проведемо дотичну AF до описаного кола трикутника APB. Тоді $\angle PAF=\angle PBA=\angle PKB$, а тому $AF\parallel BC$. Отже, $\angle FAC=\angle ACN=\angle CMA$. З цього випливає, що пряма AF дотикається до описаного кола трикутника ACM. Оскільки описані кола трикутників ACM і ABP в точці A мають спільну дотичну, то точка A лежить на лінії центрів цих кіл.

10.8. Див. задачу 9.8.

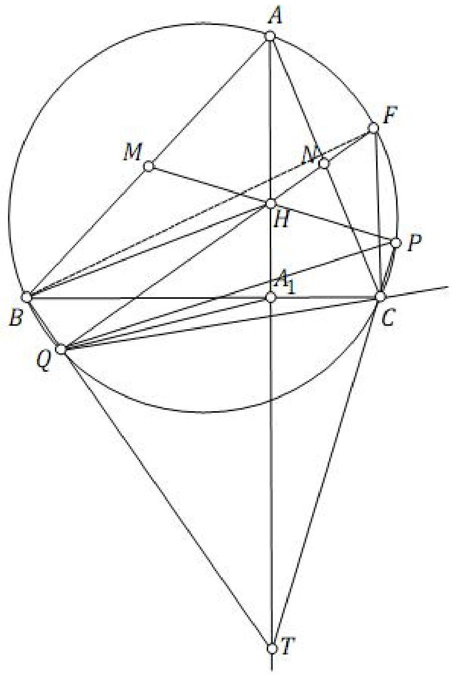
11.5. Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases}(x+y)(1+xy)+(x-y)^2=2,\\ x^3+y^3=1.\end{cases}$$

Розв'язання. Перше рівняння системи запишемо, з урахуванням рівності $x^3+y^3=1$, у вигляді $(x+y)(1+xy)+(x-y)^2-(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)-1=0$, тобто $(x+y-1)\left(1-(x-y)^2\right)=0$. Подальші міркування є очевидними.

Відповідь: $(1;0)$, $(0;1)$.

11.6. Нехай H — точка перетину висот гострокутного нерівнобедреного трикутника ABC, M — середина сторони AB, N — середина сторони AC. Позначимо через, відповідно, P і Q точки перетину променів MH і NH з описаним колом трикутника ABC. Доведіть, що прямі BQ, AH і CP перетинаються в одній точці або паралельні.



Розв'язання. Нехай AA_1 — висота трикутника ABC. Розглянемо випадок, коли прямі BQ і CP перетинаються в деякій точці T. Нам потрібно довести, що точка T лежіть на прямій AA_1. Розглянемо спочатку випадок, коли точки A і P лежать по один бік від прямої BC, а точки A і Q — по різні боки від прямої BC (див. рис.).

Як відомо, точки, симетричні ортоцентру трикутника відносно середин його сторін, лежать на описаному колі цього трикутника: насправді, якщо в трикутнику ABC точка F симетрична ортоцентру H відносно середини N сторони AC, то $\angle AFC = \angle AHC = 180° - \angle ABC$.

Далі, оскільки $FC \parallel AH$, то $\angle FCB = 90°$, і точки B і F діаметрально протилежні. Отже, $HQ \perp BT$. Аналогічно доводиться, що $HP \perp CT$. Чотирикутники $HQTP$ і BQA_1H циклічні. А тому маємо: $\angle QBC = \angle QHA_1$, $\angle QHT = \angle QPC$. Оскільки $\angle QPC = \angle QBC$, то $\angle QHT = \angle QHA_1$, що й завершує доведення.

Якщо хорда PQ і точка A лежать по різні боки від прямої BC, то $\angle QBC = \angle QHA_1$, $\angle QHT = \angle QPT$, $\angle QPT = \dfrac{\overset{\frown}{QP}}{2} + \dfrac{\overset{\frown}{PC}}{2} = \angle QBC$.

Аналогічно розглядаються інші випадки розташування точок P і Q на описаному колі трикутника ABC.

Якщо прямі BQ і CP паралельні, то неважко довести, що точка H лежить на відрізку MN, точки P і F співпадають, і тому $AH \parallel PC$.

11.7. Невід'ємні дійсні числа a, b і c задовольняють нерівність $a+b+c \le 2$. Доведіть, що

$$\sqrt{a^2+bc} + \sqrt{b^2+ca} + \sqrt{c^2+ab} \le 3.$$

Розв'язання. Можна вважати, що $a \ge b \ge c \ge 0$. Доведемо такі дві нерівності:

$$\sqrt{a^2+bc} \le a + \frac{c}{2},\ \sqrt{b^2+ca} + \sqrt{c^2+ab} \le \frac{a+3b+2c}{2}.$$

Перша з них еквівалентна нерівності $4c(a-b)+c^2 \ge 0$. Для доведення другої нерівності скористаємося тим, що для $u \ge 0$ і $v \ge 0$ $\sqrt{u} + \sqrt{v} \le \sqrt{2(u+v)}$.

Отже, $\sqrt{b^2+ca} + \sqrt{c^2+ab} \le \sqrt{2\left(b^2+ca+c^2+ab\right)}$. Неважко перевірити, що

$$2\left(b^2+ca+c^2+ab\right)\le\left(\frac{a+3b+2c}{2}\right)^2 \Leftrightarrow (a-b-2c)^2+8c(b-c)\ge 0.$$

Маємо: $\sqrt{a^2+bc}+\sqrt{b^2+ca}+\sqrt{c^2+ab}\le a+\frac{c}{2}+\frac{a+3b+2c}{2}=\frac{3}{2}(a+b+c)\le\frac{3}{2}\cdot 2=3$.

11.8. Відомо, що многочлен $P(x)$ n-го степеня з цілими коефіцієнтами можна подати у вигляді $P(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)$, де $0<x_k<3$ для всіх $k=1, 2, \ldots, n$. Доведіть, що $x_k\in\left\{\frac{3-\sqrt{5}}{2}; 1; 2; \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$ для всіх $k=1, 2, \ldots, n$.

Розв'язання. Неважко довести, що для всіх $t\in(0; 3)$

$$|t(t-1)(t-2)(t-3)|=\left|\left(t^2-3t\right)^2+2\left(t^2-3t\right)\right|\le 1,$$

причому рівність досягається тоді й тільки тоді, коли $t=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.

Нехай $a\ge 0$ — кількість рівних 1 чисел серед $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $b\ge 0$ — кількість рівних 2 чисел серед $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Якщо $a+b=n$, то твердження задачі, очевидно, виконано. Нехай $a+b<n$, $m=n-(a+b)$, і без обмеження загальності припустимо, що $x_1, x_2, \ldots, x_m\notin\{1; 2\}$. Тоді $P(x)=(x-1)^a(x-2)^b Q(x)$, де многочлен

$$Q(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_m)$$

має цілі коефіцієнти (як частка двох зведених многочленів з цілими коефіцієнтами). Отже, $Q(0)$, $Q(1)$, $Q(2)$, $Q(3)$ — деякі цілі ненульові числа, звідки отримуємо, що $A=|Q(0)Q(1)Q(2)Q(3)|\ge 1$. Але $A=\prod_{k=1}^{m}|x_k(x_k-1)(x_k-2)(x_k-3)|$, і тому, згідно з доведеним, це можливо лише у випадку, коли $|x_k(x_k-1)(x_k-2)(x_k-3)|=1$ для всіх $k=1, \ldots, m$. Остання рівність дає потрібний результат.

Задачі запропонували:
В. М. Лейфура (10.5), *І. М. Мітельман* (8.6, 8.8, 11.5), *І. П. Нагель* (9.6, 10.7),
О. Б. Панасенко (9.5), *В. М. Радченко* (11.7), *Н. П. Сердюк* (9.8=10.8, 11.8),
В. А. Ясінський (8.5, 8.7, 9.7, 10.6, 11.6).

Матеріали Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики будуть розміщені на сторінці «Юному математику» офіційного сайта

http://www.mechmat.univ.kiev.ua

механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка.