Підготовчі матеріали з геометрії 1

Хілько Данило dkhilko@ukr.net

1. У прямокутному трикутнику ABC з прямим кутом при вершині C на катеті AC вибрана така точка M, що $AM = BC$. На катеті BC вибрана точка N така, що $BN = MC$. Знийдіть кут між прямими BM та AN.

2. (USAMO 2008). В гострокутному нерівнобедреному трикутнику ABC позначено середини M, N, P сторін BC, CA, AB відповідно. Нехай серединні перпендикуляри до відрізків AB та AC перетинають промінь AM в точках D, E відповідно, а прямі BD та CE перетинаються в точці F всередині трикутника ABC. Доведіть, що точки A, N, F, P лежать на одному колі.

3. (USAMO 2005). На стороні BC гострокутного трикутника ABC взято точки P, Q. Точка C_1 така, що чотирикутник $APBC_1$ вписаний, $QC_1 \parallel CA$, а також точки C_1 та Q лежать в різних півплощинах відносно прямої AB. Точка B_1 така що чотирикутник $APCB_1$ вписаний, $QP_1 \parallel AB$, а також точки B_1 та Q лежать в різних півплощинах відносно AC. Доведіть, що точки B_1, C_1, P, Q лежать на одному колі.

4. Всередині трикутника ABC взято точку P. Прямі AP, BP, CP вдруге перетинають описане коло трикутника ABC в точках A_1, B_1, C_1. Точка A' симетрична A_1 відносно середини BC, точка B' симетрична B_1 відносно середини AC, точка C' симетрична C_1 відносно середини AB. Доведіть, що описане коло трикутника $A'B'C'$ проходить через ортоцентр трикутника ABC.

5. (IMO 2000). В трикутнику ABC проведені висоти AH_1, BH_2, CH_3 і відмічені точки дотику T_1, T_2, T_3 вписаного кола до сторін BC, AC, AB. Розглянемо прямі, що симетричні до H_1H_2, H_2H_3, H_3H_1 відносно T_1T_2, T_2T_3, T_3T_1 відповідно Доведіть, що вершини трикутника, утвореного цими прямими, лежать на вписаному колі ABC.

6. (IMOSL 2012). В трикутнику ABC точки O та I — центр описаного кола і інцентр відповідно. Точки D, E, F вибрані на сторонах BC, CA, AB так, що $BD+BF = AC$, $CD+CE = AB$. Описані кола трикутників BFD та CDE перетинаються вдруге в точці P. Доведіть, що $OP = OI$.

7. В трикутнику ABC точки O та I — центр описаного кола і інцентр відповідно. Пряма OI перетинає сторону BC в точці K. Зовнівписане коло дотикається до сторони BC в A_1. Середини дуг CBA і BCA описаного кола ABC — точки B_1 і C_1 відповідно. Доведіть, що точки K, A_1, C_1, B_1 циклічні.

8. В трикутнику ABC точки A_0, B_0, C_0 — середини сторін BC, AC, AB, точки A_1, B_1, C_1 — основи висот з A, B, C. Основа перпендикуляру з A на B_1C_1 — X_A. Аналогічно визначаються точки X_B та X_C. Доведіть, що описані кола трикутників $A_0B_0X_C$, $A_0C_0X_B$, $B_0C_0X_A$ мають спільну точку, що лежить на прямій Ейлера трикутика ABC.

9. В трикутику ABC точки A_0, B_0, C_0 — середини сторін BC, AC, AB, точки A_1, B_1, C_1 — основи висот з A, B, C. Прямі A_0C_0 та A_1C_1 перетинаються в точці T_2, прямі A_0B_0 та A_1B_1 перетинаються в точці T_3. Доведіть, що точки T_2, T_3, A лежать на одній прямій.

10. Нехай пряма Ейлера трикутника ABC з минулої задачі перетинає пряму A_1B_1 в точці K. Доведіть, що прямі C_1K, T_2T_3 перетинаються на прямій A_0B_0.