Велика канікулярна домашня

1. Якою цифрою закінчуються числа: а) $2^{1000^{1000}}$, б) $9999^{999^{99}}$, в) $7^{7^{7^{7}}}$?
2. Знайти остачі від ділення чисел а)2^{100} на 11, б) $2^{70} + 3^{70}$ на 13.
3. Знайти усі натуральні числа, які збільшуються в 9 раз, якщо між цифрою одиниць і цифрою десятків вставити нуль.
4. Знайти цифри сотень і одиниць числа $42{*}4{*}$, якщо відомо, що воно ділиться на 72.
5. Чи існує таке трицифрове число $\overline{abc}$, що $\overline{abc} - \overline{cba}$ є повним квадратом?
6. У деякій країні будь-які два міста з'єднані або авіалінією, або залізницею. Довести, що можна вибрати вид транспорту так, щоб з кожного міста можна було дістатися в будь-яке інше місто, користуючись лише цим видом транспорту.
7. У країні будь-які два міста з'єднані дорогою з одностороннім рухом. Довести, що існує місто, з якого можна проїхати в будь-яке інше не більш, ніж по двом дорогам.
8. Скількома способами можна розставити білі фігури (дві тури, два коня, два слона, ферзя і короля) на першій горизонталі шахової дошки?
9. Скількома способами з групи, що складається з 8 чоловіків і 5 жінок, можна вибрати 6 людей, щоб серед них було не менше двох жінок?
10. Скількома способами можна вибрати 12 людей з 17, якщо деякі конкретні дві людини з цих 17 не можуть бути обрані разом?
11. Скількома способами можна переставити літери у слові «пастух» так, щоб між двома голосними було рівно два приголосних?
12. Скількома способами можна вибрати а) 3 пари із 100 чоловік; б) n пар із $2n$ чоловік?
13. Знайти кількість шестицифрових чисел, у яких по три парних і непарних цифр.
14. Знайти кількість семицифрових чисел, в десятковому записі яких присутня хоча б одна із цифр 5 або 8.
15. Кожному з 35 учнів дали на вибір розв'язати одну з 17 задач. Чи правда, що серед них завжди знайдуться троє, які розв'язували одну і ту ж задачу?
16. Чи правда, що серед будь-яких семи натуральних чисел знайдуться три, сума яких ділиться на 3?
17. Є шість монет, із яких дві — фальшиві, причому відомо, що вони легші, ніж справжні. Знайти їх за три зважування.
18. Довести, що існує граф з 10 вершинами, степені яких дорівнюють $1, 1, 2, 2, \ldots, 5, 5$.
19. У графі усі вершини мають степінь 3. Довести, що в ньому є цикл.
20. Волейбольна сітка — це прямокутник 40×800 клітинок. Яку найбільшу кількість мотузків (сторін клітинок) можна перерізати, щоб сітка не розлізлася на декілька частин?
21. Довести, що в будь-якому зв'язному графі можна видалити вершину разом з усіма ребрами, що виходять з неї, так, щоб він залишився зв'язним.