Тригонометричні підстановки

1. Розв'яжіть систему в дійсних числах
$$\begin{cases} x^3 - 3x = y \\ y^3 - 3y = z \\ z^3 - 3z = x. \end{cases}$$

2. Послідовність (x_n) задана рекурентно
$$x_{n+1} = \frac{\sqrt{3}x_n - 1}{x_n + \sqrt{3}}, n \in \mathbb{N}.$$
Доведіть, що послідовність періодична при будь-якому "хорошому" x_1.

3. Знайти всі дійсні значення параметра a, при яких існує дійсне число x, що задовольняє нерівність $\sqrt{1-x^2} \geqslant a - x$.

4. Є чотири різних числа з інтервалу $(0, 1)$. Доведіть, що з них можна вибрати такі два числа x і y, що
$$0 < x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2} < \frac{1}{2}.$$

5. Доведіть, що серед будь-яких чотирьох дійсних чисел існує два таких, скажімо, a і b, що
$$\frac{1+ab}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}} > \frac{1}{2}.$$

6. Розв'яжіть рівняння в дійсних числах
$$x^2 + (4x^3 - 3x)^2 = 1.$$

7. (Для розумак!) Обчисліть інтеграл
$$I = \int \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2+x}}}dx,$$
де вираз містить n коренів.

8. Доведіть нерівність для усіх $x, y \in \mathbb{R}$
$$-\frac{1}{2} \leqslant \frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)} \leqslant \frac{1}{2}.$$

9. Розв'яжіть систему в дійсних числах
$$\begin{cases} 2x + x^2y = y \\ 2y + y^2z = z \\ 2z + z^2x = x. \end{cases}$$

10. Знайти усі трійки $x, y, z \in (0, 1)$ таких, що
$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1.$$

11. Доведіть нерівність

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2},$$

якщо $x, y, z > 0$ і $x + y + z = xyz$.

12. Доведіть нерівність

$$\frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}+\frac{z}{1-z^2}\geqslant\frac{3\sqrt{3}}{2},$$

якщо $0 < x, y, z < 1$ і $xy + yz + zx = 1$.

13. Послідовності (x_n) і (y_n) визначаються рекурентно:

$$x_1 = y_1 = \sqrt{3}, \quad x_{n+1} = x_n + \sqrt{1+x_n^2}, \quad y_{n+1} = \frac{y_n}{1+\sqrt{1+y_n^2}}.$$

Доведіть, що $2 < x_n y_n < 3$ для $n > 1$.

14. Нехай $f\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$ — неперервна функція така, що $f(2x^2 - 1) = 2xf(x)$ для всіх $x \in [-1, 1]$. Доведіть, що $f \equiv 0$.

15. (IMO-85). Нехай x, y, z — такі дійсні числа, що $x + y + z = xyz$. Доведіть, що

$$x(1-y^2)(1-z^2)+y(1-z^2)(1-x^2)+z(1-x^2)(1-y^2)=4xyz.$$

16. Нехай $a, b, c \in [0, 1]$. Доведіть, що $\sqrt{abc}+\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)}\leqslant 1$.

17. a, b, c, d — додатні дійсні числа такі, що

$$\frac{1}{1+a^4}+\frac{1}{1+b^4}+\frac{1}{1+c^4}+\frac{1}{1+d^4}=1.$$

Доведіть, що $abcd \geqslant 3$.

18. Доведіть нерівність

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\leqslant\frac{3}{2},$$

якщо $x, y, z > 0$ і $x + y + z = xyz$.