

Алгебра для чотких пацанів-1

Хілько Данило dkhilko@ukr.net

1. Дано обмежені дійснозначні функції f_1, f_2, \dots, f_k та різні числа a_1, a_2, \dots, a_k . Доведіть, що існує x , для якого

$$\sum_{i=1}^k f_i(x) - \sum_{i=1}^k f_i(x - a_i) > 1.$$

2. Дано скінченну множину A . Нехай

$$B = \left\{ \frac{a+b}{c+d} \mid a, b, c, d \in A \right\}.$$

Доведіть, що $|B| \geq 2|A|^2 - 1$.

3. Дано два набори дійсних чисел $a_1, a_2, \dots, a_n, c_1, c_2, \dots, c_n$ таких, що $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$; $a_1 + \dots + a_n = 1$; для довільного натурального $1 \leq m \leq n$ $c_1 + c_2 + \dots + c_m \leq m^k$. Знайдіть максимальне можливе значення $c_1 a_1^k + \dots + c_n a_n^k$.

4. Доведіть, що існує зростаюча послідовність натуральних чисел і константа c така, що $a_n < c1, 01^n$ і сума чисел в довільному скінченному наборі з послідовності не є помилкою квадратом.

5. Для натурального числа $N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$ визначимо $\sigma(N) = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$. Нехай $P(x) = (x + a_1) \dots (x + a_n)$ для деяких цілих чисел a_1, \dots, a_n . Відомо, що для всіх натуральних k $\sigma(P(k))$ є парною. Доведіть, що n є парним числом.

6. Докажіть тотожство

$$\frac{a_1}{a_2(a_1 + a_2)} + \dots + \frac{a_n}{a_1(a_n + a_1)} = \frac{a_2}{a_1(a_1 + a_2)} + \dots + \frac{a_1}{a_n(a_1 + a_n)}.$$

7. Известно, что числа $x^3, x^2 + x$ являются рациональными. Докажіть, что x рационально.

8. Разбейте \mathbb{R} на непересекающиеся пары чисел.

9. Докажіть, что из набора $0, 1, 2, \dots, 3^k - 1$ можно выбрать 2^k чисел так, чтобы никакое из них не являлось средним арифметическим двух других выбранных чисел.

10. Докажіть неравенство:

$$\sum_{k=1}^{n^2} \{k\} \leq \frac{n^2 - 1}{2}.$$