Заняття 8.02.2010, Технічний ліцей, 9-й клас. Застосування нерівності Коші.

1. Доведіть, що $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$ для довільних *x* та *y*.
2. Доведіть нерівність для додатних $a_1,\ a_2, \dots, a_n$: $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_n}{a_1} \geq n$. Чи справджується вона для ненульових $a_1,\ a_2, \dots, a_n$?
3. Для додатних *a*, *b*, *c* довести, що $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$.
4. Розглядатимемо такі набори дійсних чисел $x_1,\ x_2, \dots, x_{2010}$, $0 < x_i < 1, 1 \leq i \leq 2010$, що $x_1 x_2 \dots x_{2010} = (1 - x_1)(1 - x_2) \dots (1 - x_{2010})$. Знайдіть серед цих наборів такий, що значення виразу $x_1 x_2 \dots x_{2010}$ максимальне.
5. Для якої висоти прямокутна трапеція з гострим кутом 30° і периметром 6 має найбільшу площу?

Додому:

1. Для додатних *a*, *b*, *c* доведіть нерівність: $(a + b)(a + c)(b + c) \geq 8abc$.
2. Знайдіть найменше значення виразу $\sqrt{x_1^2 + (1 - x_2)^2} + \sqrt{x_2^2 + (1 - x_3)^2} + \cdots + \sqrt{x_{2n}^2 + (1 - x_1)^2}$.