Домашнее задание 16.04.14

1 Лемма Кронекера

1. На бесконечной в одну сторону полоске записаны произвольные числа. Докажите, что найдётся её кусок, сумма чисел на котором отличается от целого не больше, чем $000,1$.

2. Два кузнечика одновременно начинают прыгать по окружности из одной точки, один — с шагом α, другой — с шагом β. Докажите, что не позднее, чем за n^2 шагов оба они окажутся на расстоянии меньше $\frac{1}{n}$ от стартовой точки.

3. Предполагая, что π иррационально, докажите, что $\sin n$ может быть как угодно близким к 1.

4. Пусть множество X — всюду плотно в $\mathbb{R}$ и r — действительное число. Докажите, что тогда множества
$$Y = \{x + r, x \in X\}, Z = \{rx, x \in X\}$$
тоже всюду плотны в $\mathbb{R}$.

5. Докажите, что существует квадрат натурального числа, десятичная запись которого начинается с любых предварительно заданых цифр.

2 Старое

1. В круговом турнире участвовало $2n$ команд, каждая играла с каждой, в каждом матче одна команда выигрывала, а одна проигрывала, а лился турнир $2n - 1$ день. Можно ли выбрать для каждого игрового дня по выигравшей команде так, чтобы ни одна команда не была выбрана дважды.

2. На вечеринку пришли b мальчиков и не меньше $2b - 1$ девочек. Каждый мальчик приглашает одну девочку на танец. Докажите, что это можно сделать таким образом, чтобы каждый мальчик танцевал с девочкой, которую он знает, или все девочки, которых он знает, не танцевали.

3. О графе G известно, что для любого подмножества его вершин D количество вершин, соединённых ребром хотя бы с одной вершиной из D не меньше, чем $|D|$. Докажите, что из этого графа можно выбросить не больше $\frac{|G|}{3}$ вершин так, чтобы все остальные можно было разбить на пары смежных.