Многочлени від декількох змінних

1. Нехай $f(x)$ – многочлен із цілими коефіцієнтами зі старшим коефіцієнтом рівним одиниці. Припустимо, що модулі усіх коренів цього многочлена дорівнюють 1. Доведіть, що тоді усі корені цього многочлена – корені із одиниці.

2. Припустимо, що для комплексних чисел $a_1, \dots, a_n$ для кожного $k, 0 < k \leq n$ справедлива рівність:

$$a_1^k + a_2^k + \cdots + a_n^k = 0$$

Доведіть, що усі числа $a_1, \dots, a_n$ рівні 0.

3. Многочлен $P(x_1, \dots, x_n)$ називається кососиметричним, якщо при зміні місцями довільних двох змінних значення P змінює знак. Позначимо $\Delta(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i<j}(x_i - x_j)$. Доведіть, що довільний кососиметричний многочлен $P(x_1, \dots, x_n)$ можна подати у вигляді $\Delta(x_1, \dots, x_n) \cdot Q(x_1, \dots, x_n)$,

де $Q(x_1, \dots, x_n)$ - симетричний многочлен.

4. Відомо, що многочлен від двох змінних $P(x, y)$ приймає значення як завгодно близькі до 0 (при дійсних значеннях x та y). Чи випливає звідси, що цей многочлен приймає значення 0 при деяких дійсних x та y?

5. Задано натуральнее число $n \geq 3$. Знайдіть найменше k таке, що для довільного набору з n точок $(x_i, y_i), 1 \leq i \leq n$, на площині, якому жодні три точки не лежать на одній прямій, та довільного набору дійсних чисел $c_i, 1 \leq i \leq n$, існує многочлен від двох змінних $P(x, y)$ степеня не більше k такий, що $P(x_i, y_i) = c_i, 1 \leq i \leq n$.