Тренувальні збори для групи IMO. Геометрія

Данило Хілько dkhilko@ukr.net

Листопад 2015

1 Базові задачі

1. У прямокутному трикутнику ABC з прямим кутом при вершині C на катеті AC вибрана така точка M, що $AM = BC$. На катеті BC вибрана точка N така, що $BN = MC$. Знайдіть кут між прямими BM та AN.

2. Дано правильний трикутник ABC і коло ω, яке дотикається до AB в точці B, а до AC — в точці C. Пряма, яка проходить через A, перетинає ω в точках D і E. Нехай O — центр ABC. Доведіть, що B, O та середини відрізків CD та CE лежать на одному колі.

3. Дано трикутник ABC. Коло ω проходить через вершини A і C і перетинає сторони BA і BC в точках C_1 і A_1. Описане коло трикутника BA_1C_1 перетинає вдруге описане коло трикутника ABC в точці K. Нехай O — центр ω. Доведіть, що $\angle BKO = 90^\circ$.

4. Нехай I — інцентр трикутника ABC ($AB < AC$), M — середина BC, а N — середина дуги BAC описаного кола трикутника ABC. Доведіть, що $\angle ANI = \angle IMB$.

5. Дано гострокутний трикутник ABC, у якому $AC > BC$. Нехай M — середина сторони AB, AP, BQ — висоти трикутника, H — його ортоцентр. Нехай прямі AB і PQ перетинаються в точці R. Доведіть, що прямі RH і CM перпендикулярні.

6. Дано трикутник ABC. Його вписане коло дотикається сторін AB, BC в точках C_0, A_0. Доведіть, що пряма A_0C_0, бісектриса кута A і середня лінія трикутника, яка є паралельною до AB, перетинаються в одній точці.

7. Вписане коло трикутника ABC дотикається сторін AB, BC, CA в точках C_0, A_0, B_0. На площині взята точка P. Нехай X — точка перетину прямої AB та серединного перпендикуляру до C_0P. Точки Y, Z визначені аналогічно. Доведіть, що X, Y, Z колінеарні.

8. Дано трикутник ABC. Його зовнівписане коло дотикається сторони BC в точці K, а коло ω, яке дотикається до AC та AB також дотикається описаного кола трикутника ABC в точці N. Доведіть, що $\angle BAK = \angle NAC$.

9. Нехай O — центр описаного кола гострокутного трикутника ABC, і цей центр не належить жодній з медіан AA_0, BB_0, CC_0. На променях OA_0, OB_0, OC_0 позначили точки A_1, B_1, C_1 відповідно так, що $\angle OAA_0 = \angle OA_1A$, $\angle OBB_0 = \angle OB_1B$, $\angle OCC_0 = \angle OC_1C$. Доведіть, що прямі AA_1, BB_1, CC_1 перетинаються в одній точці.

2 Серія 1

1. (USAMO 2008). В гострокутному нерівнобедреному трикутнику ABC позначено середини M, N, P сторін BC, CA, AB відповідно. Нехай серединні перпендикуляри до відрізків AB та AC перетинають промінь AM в точках D, E відповідно, а прямі BD та CE перетинаються в точці F всередині трикутника ABC. Доведіть, що точки A, N, F, P лежать на одному колі.

2. (USAMO 2005). На стороні BC гострокутного трикутника ABC взято точки P, Q. Точка C_1 така, що чотирикутник $APBC_1$ вписаний, $QC_1 \parallel CA$, а також точки C_1 та Q лежать в різних півплощинах відносно прямої AB. Точка B_1 така що чотирикутник $APCB_1$ вписаний, $QB_1 \parallel AB$, а також точки B_1 та Q лежать в різних півплощинах відносно AC. Доведіть, що точки B_1, C_1, P, Q лежать на одному колі.

3. Всередині трикутника ABC взято точку P. Прямі AP, BP, CP вдруге перетинають описане коло трикутника ABC в точках A_1, B_1, C_1. Точка A' симетрична A_1 відносно середини BC, точка B' симетрична B_1 відносно середини AC, точка C' симетрична C_1 відносно середини AB. Доведіть, що описане коло трикутника $A'B'C'$ проходить через ортоцентр трикутника ABC.

4. (IMOSL 2012). В трикутнику ABC точки O та I — центр описаного кола і інцентр відповідно. Точки D, E, F вибрані на сторонах BC, CA, AB так, що $BD+BF = AC$, $CD+CE = AB$. Описані кола трикутників BFD та CDE перетинаються вдруге в точці P. Доведіть, що $OP = OI$.

5. Дано трикутник ABC з $\angle C = \angle A + 90°$. Точка D обрана на продовженні BC так, що $AC = AD$. Точка E лежить в різних піплощинах з точкою A відносно BC і

$$\angle EBC = \angle A, \angle EDC = \angle A/2.$$

Доведіть, що $\angle CED = \angle ABC$.

6. Два кола ω_1 та ω_2 з центрами O_1 та O_2 відповідно перетинаються в точках A і B. Точку X обрано довільним чином на колі ω_2. Позначимо через Y точку на ω_1, для якої $\angle XBY = 90°$. Пряма O_1X вдруге перетинає ω_2 в X'. Пряма $X'Y$ перетинає ω_2 в K. Доведіть, що X є серединою дуги AK.

7. На медіанах AA_0 та BB_0 гострокутного трикутника ABC побудовано дуги однакової градусної міри в сторону вершини C. Доведіть, що спільна хорда кіл, які містять ці дуги, містить точку C.

8. Дано три неколінеарні точки P, A, B. Точка Q така, що $\angle APQ = 90°$ і $AQ = BQ$. Доведіть, що $\angle PQB - \angle PQA = 2\angle PAB$.

3 Задачі з зірочкою

1. (IMO 2000). В трикутнику ABC проведені висоти AH_1, BH_2, CH_3 і відмічені точки дотику T_1, T_2, T_3 вписаного кола до сторін BC, AC, AB. Розглянемо прямі, що симетричні до H_1H_2, H_2H_3, H_3H_1 відносно T_1T_2, T_2T_3, T_3T_1 відповідно Доведіть, що вершини трикутника, утвореного цими прямими, лежать на вписаному колі ABC.

2. Точки A_0, B_0, C_0 — середини сторін BC, CA, AB трикутника ABC, а AA_1, BB_1, CC_1 — його висоти. Нехай пряма Ейлера трикутника ABC перетинає пряму A_1B_1 в точці K. Доведіть, що прямі C_1K, T_2T_3 перетинаються на прямій A_0B_0, де $T_2 = A_0C_0 \cap A_1C_1$, $T_3 = A_0B_0 \cap A_1B_1$.

3. Чевіани AD, BE, CF гострокутного трикутника ABC перетинаються в точці P. Описані кола трикутників BDF та CDE вдруге перетинають описане коло трикутника ABC в точках E_0 та F_0 відповідно. L — така точка, що описане коло BDL дотикається до AB, а описане коло CDL дотикається до AC. Доведіть, що чотирикутник AE_0LF_0 є гармонічним.

4. Чевіани AD, BE, CF гострокутного трикутника ABC перетинаються в точці P. Позначимо другу точку перетину описаних кіл трикутників BFC та BDA через X, а другу точку перетину кіл BEC та CDA — Y. Доведіть, що описане коло трикутника XDY проходить через середину AP та середину BC.

4 Серія 2

1. Нехай O — центр описаного кола ω трикутника ABC. Позначимо через A_1 середину сторони BC. Нехай A_2 — друга точка перетину AA_1 з колом ω, пряма ℓ_A дотикається до кола ω в точці A_2. Позначимо через P_A точку перетину прямої ℓ_A з прямою, яка проходить через точку A_1 перпендикулярно до прямої AO. Точки P_B і P_C визначаються аналогічно. Доведіть, що точки P_A, P_B, P_C лежать на одній прямій.

2. В трикутнику ABC точки O та I — центр описаного кола і інцентр відповідно. Пряма OI перетинає сторону BC в точці K. Зовнівписане коло дотикається до сторони BC в A_1. Середини дуг CBA і BCA описаного кола ABC — точки B_1 і C_1 відповідно. Доведіть, що точки K, A_1, C_1, B_1 циклічні.

3. В трикутнику ABC точки A_0, B_0, C_0 — середини сторін BC, AC, AB, точки A_1, B_1, C_1 — основи висот з A, B, C. Основа перпендикуляру з A на B_1C_1 — X_A. Аналогічно визначаються точки X_B та X_C. Доведіть, що описані кола трикутників $A_0B_0X_C$, $A_0C_0X_B$, $B_0C_0X_A$ мають спільну точку, що лежить на прямій Ейлера трикутика ABC.

4. Навколо гострокутного трикутника ABC, у якому $AB < BC < AC$, описано коло ω з центром O. Позначимо через I центр вписаного кола даного трикутника, а через M — середину сторони BC. Нехай точка Q симетрична точці I відносно M, півпряма OM перетинає коло ω в точці D, а півпряма QD вдруге перетинає коло ω в точці T. Доведіть, що $\angle ACT = \angle DOI$.

5. В гострокутному трикутнику ABC H є ортоцентром, точки X, Y взято на сторонах AB та AC так, що $AX = 2XB$, $AY = 2YC$. Доведіть, що якщо $3BC^2 = AC^2 + AB^2$, то описані кола трикутників AXY та BHC дотикаються.

6. Трапеція $ABCD$ вписана в коло ω ($AD \parallel BC$). Вписані кола ABC і ABD дотикаються до BC та AD в точках P та Q. Нехай X та Y — середини дуг BC та AD кола ω. Доведіть, що прямі YQ та XP перетинаються на ω.

7. На прямій лежать точки X, Y, Z (саме в такому порядку). Трикутники XAB, YBC, ZCD — правильні, причому вершини першого і третього орієнтовані проти годинникової стрілки, а другого по годинниковій стрілці. Доведіть, що прямі AC, BD та XY перетинаються в одній точці.

8. Дано гострокутний трикутник ABC. Коло ω з діаметром BC перетинає AB та AC в точках E та F відповідно. Нехай M — середина BC, а P — перетин AM та EF. На меншій дузі EF кола ω взято точку X. Y — друга точка перетину XP з ω. Доведіть, що $\angle XAY = \angle XYM$.

9. Дано нерівнобоку трапецію $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Коло, яке проходить через точки A та B, перетинає бокові сторони трапеції в точках P, Q, а діагоналі — в точках M і N. Доведіть, що прямі PQ, MN, CD перетинаються в одній точці.

10. Точки A_1, B_1, C_1 вибрано на сторонах BC, CA і AB трикутника ABC так, що фони задовольняють умову $AB_1 - AC_1 = CA_1 - CB_1 = BC_1 - BA_1$. Нехай OA, OB і OC — центри кіл, описаних навколо трикутників AB_1C_1, A_1BC_1 і A_1B_1C. Доведіть, що центр вписаного кола в трикутник $O_AO_BO_C$, співпадає з центром вписаного кола трикутника ABC.

11. На сторонах BA і BC трикутника ABC обрано точки C_0 і A_0 відповідно. Нехай точки M і M_0 — середини відрізків AC і A_0C_0. Доведіть, що якщо $AC_0 = CA_0$, то пряма MM_0 паралельна бісектрисі $\angle ABC$.