Теорема Форда-Фалкерсона (8 клас)

1. (Теорема Форда-Фалкерсона) Розглянемо граф. Нехай в цьому графі є дві вершини, які ми назвемо старт та фініш та позначимо їх s, t відповідно. Уявимо собі таку ситуація, що наш граф це схема водопостачання, де ребра це труби, а вершини це місця де відповідні труби з'єднуються. Також вважатимемо, що у вершину s вода втікає, а з вершини t вода витікає. Також введемо таке поняття як пропускна спроможність ребра (труби) між вершинами x та y , яке характеризує можливість ребра (труби) пропускати воду в напрямку від x в y (або від y в x , але пропускна спроможність ребра з y в x може бути не рівною пропускній спроможності з x в y). Визначимо пропускну спроможність ребра як число - $c(x, y)$, де x, y - вершини між якими проведене ребро (якщо ребра нема то $c(x, y)=0$) та $c(x, y)$ характеризує можливість пропускати воду з вершини x у вершину y (тобто характеристика $c(x, y)$, по суті відповідає за те, що ця труба може пропустити максимум $c(x, y)$ води в напрямку з вершини x у вершину y). Задамо такі властивості пропускної спроможності: $c(x, y)\geq 0$, де x, y - будь-які вершини графа; $c(x, s)=0$ та $c(t,x)=0$ (тобт нічого не може вливатись у стар та виливатись з фінішу). Нехай ми пустили воду по трубам. Тоді введемо таке поняття як потік з вершини x у вершину y і позначатимемо його як число $f(x, y)$ (тобто скільки води протекло з вершини x у вершину y). Задамо такі властивості потоку: $f(x, y)=-f(y, x)$ (якщо з вершини x витекла якась кількість води у вершину y, то якщо подивитись що витекло з вершини y у вершину x, то це та ж сама кількість, але знак «–« означає, що по суті вода відносно y не витікає, а втікає у y); $f(x,y)\leq c(x,y)$ (тобто кількість води, що протікає з x у вершину y не більша ніж пропускна спроможність); $\sum_{y_i\in V} f(x, y_i)=0$, де V - множина вершин графа та $x\neq s,t$ (тобто все що втекло у вершину x витекло з цієї ж вершини). Визначимо потужність потоку f , вона рівна: $\sum_{x\in V} f(s,x)$.

   Нехай дві множини вершин задовольняють такі властивості: $A\bigcup B=V,\ A\bigcap B=\varnothing,\ s\in A,\ t\in B$. Тоді множини A, B назвемо перерізом, а сума $\sum_{x\in A,\, y\in B} c(x,y)$ - пропускна здатність перерізу (тобто грубо кажучи скільки може протекти води з множини A в B. Також введмо доповнюючий граф G_f у якого вершини залишаються ті ж самі, а пропускна спроможність така: $\breve{c}(x,y)=c(x,y)-f(x,y)$.

   Тоді теорема стверджує, що наступні твердження еквівалентні:

   1) потужність потоку f максимальна;

   2) потужність потоку рівна мінімальній пропускній здатності перерізу;

   3) нема шляху з s в t в графі G_f, де існує орієнтоване ребро з x в y тоді і лише тоді, коли $\breve{c}(x,y)>0$.

2. (Теорема Менгера) Є неорієнтований граф G та вершини $u, v, u\neq v$.

   1)Нехай при видаленній довільних (k-1) ребер лишається шлях з u в v. Доведіть, що тоді існують k шляхів з u в v, що не перетинаються по ребрах.

   2) Нехай при видаленній довільних (k-1) вершин, відмінних від $u, v,$ лишається шлях з u в v. Доведіть, що тоді існують k шляхів з u в v, що не перетинаються по вершинах.

3. (Теорема Кьоніга) Нехай є клітчата табличка і на ній стоять скінченна кількість тур. Тоді максимальна кількість тур, що не б’ють одна одну рівна мінімальній кількості полос (рядків або стовпчиків), якими можна покрити ці тури.