

Трохи теорії чисел

Надо мыслить. Меня, например,
кормят идеи.

Бендер О.

1. Розв'язати рівняння в цілих числах $x^2 + 2y^2 = z^2$.
2. (Паша) Розв'язати рівняння в цілих числах $x^2 - 3y^2 = z^2$.
3. (Микита) Розв'язати рівняння в цілих числах $x^2 - y^2 = 3z^2$.
4. (Наталка) Розв'язати рівняння в цілих числах $-2x^2 + 3y^2 = z^2$.
5. (Катя) Розв'язати рівняння в цілих числах $3x^2 - y^2 = 2z^2$.
6. Розв'язати рівняння в цілих числах $x(x - 1) + 3y(y - 1) = 4z(z + 1)$.
7. Розв'язати рівняння в цілих числах $x^2 + xy - 2y^2 = 4z^2 + 3yz$.
8. Розв'язати рівняння в натуральних числах $(xy - 7)^2 = x^2 + y^2$.
9. Довести, що, якщо a, b, c — цілі числа, то $abc(a^3 - b^3)(b^3 - c^3)(c^3 - a^3) : 7$.
10. Довести, що для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ існують раціональні, але не цілі числа, a і b такі, що $a - b, a^2 - b^2, \dots, a^n - b^n$ — цілі числа.
11. Розв'язати рівняння в натуральних числах

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right) \left(1 + \frac{1}{b}\right) \left(1 + \frac{1}{c}\right) = 3.$$