ТРИДЦАТЬ ПЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Весенний тур,
8 – 9 классы, сложный вариант, 2 марта 2014 г.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы	задачи
3	1. Дед Мороз раздал детям 47 шоколадок так, что каждая девочка получила на одну шоколадку больше, чем каждый мальчик. Затем дед Мороз раздал тем же детям 74 мармеладки так, что каждый мальчик получил на одну мармеладку больше, чем каждая девочка. Сколько всего было детей?
5	2. На клетчатой доске 5×5 Петя отмечает несколько клеток. Вася выиграет, если сможет накрыть все эти клетки неперекрывающимися и не вылезающими за границу квадрата уголками из трёх клеток (уголки разрешается класть только «по клеточкам»). Какое наименьшее число клеток должен отметить Петя, чтобы Вася не смог выиграть?
6	3. На квадратном столе лежит квадратная скатерть так, что ни один угол стола не закрыт, но с каждой стороны стола свисает треугольный кусок скатерти. Известно, что какие-то два соседних куска равны. Докажите, что и два других куска тоже равны. (Скатерть нигде не накладывается сама на себя, ее размеры могут отличаться от размеров стола.)
7	4. Царь вызвал двух мудрецов. Он дал первому 100 пустых карточек и приказал написать на каждой по натуральному числу (числа не обязательно разные), не показывая их второму. Затем первый может сообщить второму несколько различных чисел, каждое из которых либо записано на какой-то карточке, либо равно сумме чисел на каких-то карточках (не уточняя, как именно каждое число получено). Второй должен определить, какие 100 чисел написаны на карточках. Если он этого не сможет, обоим отрубят головы; иначе из бороды каждого вырвут столько волосков, сколько чисел сообщил первый второму. Как мудрецам, не сговариваясь, остаться в живых и потерять минимальное количество волосков?
7	5. Дано несколько белых и несколько черных точек. От каждой белой точки идет стрелка в каждую черную, на каждой стрелке написано натуральное число. Известно, что если пройти по любому замкнутому маршруту из стрелок, то произведение чисел на стрелках, идущих по направлению движения, равно произведению чисел на стрелках, идущих против направления движения. Обязательно ли тогда можно поставить в каждой точке натуральное число так, чтобы число на каждой стрелке равнялось произведению чисел на ее концах?
9	6. Из кубиков $1 \times 1 \times 1$ склеен куб $3 \times 3 \times 3$. Какое наибольшее количество кубиков можно из него выкинуть, чтобы осталась фигура с такими двумя свойствами: • со стороны любой грани исходного куба фигура выглядит как квадрат 3×3 (глядя перпендикулярно этой грани, мы не увидим просвета — видны 9 кубиков фигуры); • переходя в фигуре от кубика к кубику через их общую грань, можно от любого кубика добраться до любого другого?
9	7. На окружности отмечены 10 точек, занумерованные по часовой стрелке: $A_1, A_2, \ldots, A_{10}$, причём известно, что их можно разбить на пары симметричных относительно центра окружности. Изначально в каждой отмеченной точке сидит по кузнечику. Каждую минуту один из кузнечиков прыгает *вдоль окружности* через своего соседа так, чтобы расстояние между ними не изменилось. При этом нельзя пролетать над другими кузнечиками и попадать в точку, где уже сидит кузнечик. Через некоторое время оказалось, что какие-то 9 кузнечиков сидят в точках $A_1, A_2, \ldots, A_9$, а десятый кузнечик сидит на дуге $A_9A_{10}A_1$. Можно ли утверждать, что он сидит именно в точке A_{10}?

ТРИДЦЯТЬ П’ЯТИЙ ТУРНІР МІСТ

Весняний тур,

8 – 9 класи, складний варіант, 2 березня 2014 р.

(Підсумок підбивається за трьома задачами, за якими досягнуто найвищого результату.)

бали	задачі
3	1. Дід Мороз роздав дітям 47 шоколадок так, що кожна дівчинка отримала на одну шоколадку більше, ніж кожен хлопчик. Потім дід Мороз роздав тим самим дітям 74 мармеладки так, що кожен хлопчик отримав на одну мармеладку більше, ніж кожна дівчинка. Скільки всього було дітей?
5	2. На клітчастій дошці 5×5 Петро відмічає декілька клітинок. Василь виграє, якщо зможе накрити всі ці клітинки триклітинними кутками, які не перекриваються та не вилізають за межі квадрата (кутки дозволяється класти лише «по клітинках»). Яку найменшу кількість клітинок має відмітити Петро, щоб Василь не зміг виграти?
6	3. На квадратному столі лежить квадратна скатерть так, що жодний кут стола не закрито, але з кожного боку стола звисає трикутний шматок скатерті. Відомо, що якісь два сусідні шматки рівні. Доведіть, що й два інші шматки рівні. (Скатерть ніде не накладається на себе, її розміри можуть відрізнятися від розмірів стола.)
7	4. Цар викликав двох мудріїв. Він дав першому 100 порожніх карток та наказав написати на кожній по одному натуральному числу (числа не обов’язково різні), не показуючи їх другому. Після цього перший мудрій може повідомити другому декілька чисел, кожне з яких або записане на одній з карток, або дорівнює сумі чисел на деяких картках (не уточнюючи, яким чином отримані числа). Другий має визначити, які саме 100 чисел написані на картках. Якщо він не зможе цього зробити, обом відітнуть голови; інакше з бороди кожного вирвуть стільки волосинок, скільки чисел перший повідомив другому. Як можуть мудрії, не домовляючись, залишитися живими та втратити найменшу кількість волосинок?
7	5. Дано декілька білих і декілька чорних точок. Від кожної білої точки йде стрілка у кожну чорну, на кожній стрілці написане натуральне число. Відомо, що коли пройти будь-яким замкненим маршрутом зі стрілок, то добуток чисел на стрілках, спрямованих у напрямку руху, дорівнює добутку чисел на стрілках, спрямованих проти напрямку руху. Чи обов’язково можна поставити у кожній точці натуральне число так, щоб число на кожній стрілці дорівнювало добутку чисел на її кінцях?
9	6. З кубиків $1 \times 1 \times 1$ склеєно куб $3 \times 3 \times 3$. Яку найбільшу кількість кубиків можна з нього викинути, щоб залишилася фігура з такими двома властивостями: • з боку кожної грані вихідного куба фігура виглядає як квадрат 3×3 (якщо дивитися перпендикулярно цій грані, видно 9 кубиків фігури без просвітів); • переходячи у фігурі від кубика до кубика через їхню спільну грань, можна від будь-якого кубика дістатися до будь-якого іншого?
9	7. На колі відмічено 10 точок, занумерованих за годинниковою стрілкою: $A_1, A_2, \ldots, A_{10}$, причому відомо, що їх можна розбити на пари симетричних відносно центра кола. Спочатку у кожній відміченій точці сидить коник. Кожну хвилину один з коників стрибає *вздовж кола* через свого сусіда так, щоб відстань між ними не змінилася. При цьому коник не пролітає над іншими кониками, крім сусіда, та не потрапляє у точку, де вже сидить коник. Через деякий час виявилося, що якісь 9 коників сидять у точках $A_1, A_2, \ldots, A_9$, а десятий коник сидить на дузі $A_9A_{10}A_1$. Чи можна стверджувати, що він сидить саме в точці A_{10}?

ТРИДЦАТЬ ПЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Весенний тур,
10 – 11 классы, сложный вариант, 2 марта 2014 г.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы		задачи
3	1.	Незнайка хвастается, что написал в ряд несколько единиц, поставил между каждыми соседними единицами знак «+» или «×», расставил скобки и получил выражение, значение которого равно 2014; более того, если в этом выражении заменить одновременно все знаки «+» на знаки «×», а знаки «×» на знаки «+», все равно получится 2014. Может ли он быть прав?
	2.	Верно ли, что любой выпуклый многоугольник можно по прямой разрезать на два меньших многоугольника с равными периметрами и
4	а)	равными наибольшими сторонами?
4	б)	равными наименьшими сторонами?
6	3.	Царь вызвал двух мудрецов. Он дал первому 100 пустых карточек и приказал написать на каждой по положительному числу (числа не обязательно разные), не показывая их второму. Затем первый может сообщить второму несколько различных чисел, каждое из которых либо записано на какой-то карточке, либо равно сумме чисел на каких-то карточках (не уточняя, как именно каждое число получено). Второй должен определить, какие 100 чисел написаны на карточках. Если он этого не сможет, обоим отрубят головы; иначе из бороды каждого вырвут столько волосков, сколько чисел сообщил первый второму. Как мудрецам, не сговариваясь, остаться в живых и потерять минимальное количество волосков?
7	4.	Дан многочлен двадцатой степени с целыми коэффициентами. На плоскости отметили все точки с целыми координатами, у которых ординаты не меньше 0 и не больше 10. Какое наибольшее число отмеченных точек может лежать на графике этого многочлена?
8	5.	Дан треугольник, у которого нет равных углов. Петя и Вася играют в такую игру: за один ход Петя отмечает точку на плоскости, а Вася красит ее по своему выбору в красный или синий цвет. Петя выиграет, если какие-то три из отмеченных им и покрашенных Васей точек образуют одноцветный треугольник, подобный исходному. За какое наименьшее число ходов Петя сможет гарантированно выиграть (каков бы ни был исходный треугольник)?
9	6.	Каждому городу в некоторой стране присвоен индивидуальный номер. Имеется список, в котором для каждой пары номеров указано, соединены города с данными номерами железной дорогой или нет. Оказалось, что, какие ни взять два номера M и N из списка, можно так перенумеровать города, что город с номером M получит номер N, но список по-прежнему будет верным. Верно ли, что, какие ни взять два номера M и N из списка, можно так перенумеровать города, что город с номером M получит номер N, город с номером N получит номер M, но список по-прежнему будет верным?
10	7.	Многочлен $P(x)$ удовлетворяет условиям: $$P(0)=1;\quad (P(x))^2 = 1 + x + x^{100}Q(x),\ \text{где } Q(x) - \text{некий многочлен.}$$ Докажите, что коэффициент при x^{99} в многочлене $(P(x)+1)^{100}$ равен нулю.

ТРИДЦЯТЬ П'ЯТИЙ ТУРНІР МІСТ
Весняний тур,
10 – 11 класи, складний варіант, 2 березня 2014 р.
(Підсумок підбивається за трьома задачами, за якими досягнуто найвищого результату; бали за пункти однієї задачі додаються.)

бали	задачі	
3	1.	Незнайко хвалиться, що написав у ряд декілька одиниць, поставив між кожними сусідніми одиницями знак «+» або «×», розставив дужки й отримав вираз, значення якого дорівнює 2014; більш того, якщо у цьому виразі замінити одночасно всі знаки «+» на знаки «×», а знаки «×» на знаки «+», все одно вийде 2014. Чи може він бути правим?
	2.	Чи правильно, що кожен опуклий многокутник можна розрізати вздовж прямої на два менші многокутники з рівними периметрами та
4	а)	рівними найбільшими сторонами?
4	б)	рівними найменшими сторонами?
6	3.	Цар викликав двох мудріїв. Він дав першому 100 порожніх карток та наказав написати на кожній по одному натуральному числу (числа не обов'язково різні), не показуючи їх другому. Після цього перший мудрій може повідомити другому декілька чисел, кожне з яких або записане на одній з карток, або дорівнює сумі чисел на деяких картках (не уточнюючи, яким чином отримані числа). Другий має визначити, які саме 100 чисел написані на картках. Якщо він не зможе цього зробити, обом відітнуть голови; інакше з бороди кожного вирвуть стільки волосинок, скільки чисел перший повідомив другому. Як можуть мудрії, не домовляючись, залишитися живими та втратити найменшу кількість волосинок?
7	4.	Дано многочлен двадцятого степеня з цілими коефіцієнтами. На площині відмітили всі точки з цілими координатами, у яких ординати невід'ємні та не більші за 10. Яка найбільша кількість відмічених точок може лежати на графіку цього многочлена?
8	5.	Дано трикутник, у якого немає рівних кутів. Петро і Василь грають у таку гру: за один хід Петро відмічає точку на площині, а Василь фарбує її на свій розсуд червоною або синьою фарбою. Петро виграє, якщо якісь три з відмічених ним і пофарбованих Василем точок утворюють однокольоровий трикутник, подібний вихідному. За яку найменшу кількість ходів Петро зможе гарантовано виграти (яким би не був вихідний трикутник)?
9	6.	Кожному місту в деякій країні дано індивідуальний номер. Є список, у якому для кожної пари номерів вказано, чи з'єднані міста з цими номерами залізницею чи ні. Виявилося, що які б два номери M і N зі списку не взяти, можна так перенумерувати міста, що місто з номером M отримає номер N, але список все одно буде правильним. Чи вірно те, що які б два номери M і N зі списку не взяти, можна так перенумерувати міста, щоб місто з номером M отримало номер N, місто з номером N отримало номер M, але список все одно був правильним?
10	7.	Многочлен $P(x)$ задовольняє умови: $$P(0)=1; \quad (P(x))^2 = 1 + x + x^{100}Q(x),$$ де $Q(x)$ — деякий многочлен. Доведіть, що коефіцієнт при x^{99} у многочлені $(P(x)+1)^{100}$ дорівнює нулю.