# ***Олімпіадка***

1. Знайти значення виразу: $x^6+y^6+2x^4y+2xy^4+2x^3y^3+3xy+3(x^3+y^3)+x^2y^2$, якщо $x^3+y^3+xy=3$.
2. Знайти суму: $C_{26}^0+26C_{26}^1+26^2C_{26}^2+..+26^{26}C_{26}^{26}$ .
3. Довести тотожність для всіх $n\in N$ (тобто натуральних значень числа $n$): $1^3+3^3+5^3+..+(2\mathrm{n}-1)^3=n^2(2n^2-1)$.
4. Вова по черзі перерізає мотузку волейбольної сітки, що має вигляд прямокутника $m\times n$. Яку найбільше число мотузочок він може перерізати, щоб сітка не розпалась на куски.(Тобто ви маєте граф в якому вузли – вершини, а сторони одиничних клітинок з яких складається прямокутник $m\times n$ - ребра і вам треба вирізати максимальну кількість ребер так, щоб граф залишився зв'язним)
5. Напишіть, що таке $C_n^k$ і доведіть комбінаторними міркуваннями формулу: $C_{n+1}^k=C_n^k+C_n^{k-1}$ .
6. (Додаткова задача) Доведіть, що граф двудольний тоді і лише тоді, коли в ньому нема непарних циклів.

# ***На засвоєння***

1. Нехай $d(n)$ - кількість дільників числа $n$ ($d(n)$ не дорівнює добутку чисел $d$ і $n$, тобто $d(n)$ це якесь значення, яке залежить лише від значення числа $n$). Нехай число розкладається на добуток простих чисел так: $n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}..p_k^{a_k}$ , де $p_i$ - є простим числом для будь-якого $i$ для якого виконується умова $1\le i\le k$ ; $a_j$ - якесь натуральне число для будь-якого $j$ для якого виконується умова $1\le j\le k$. Доведіть, що кількість дільників числа $n$ дорівнює: $(a_1+1)(a_2+1)..(a_k+1)$ , або що те ж саме: $\mathrm{d(n)}=(a_1+1)(a_2+1)..(a_k+1)$.
2. (Теорема Холла) Є дві множини дівчат і хлопчиків. Деякі хлопчики і дівчата знають один одного. Нехай хлопчиків n і дівчат m, де m>n. Ми хочемо кожному хлопчику поставити в пару дівчинку так, щоб вони знали один одного і ніяка дівчинка не була в парі з двома хлопчиками одночасно. Доведіть, що це можливо зробити тоді і тільки тоді, коли виконується така умова: будь-які k хлопчиків знають щонаймеше k дівчат. (Підказка: подумайте над тим, коли можна викинути якісь пари дівчат з хлопцями, щоб умова в задачі зберігалась(тоді ви зможете використати індукцію), що має для цього виконуватись)
3. На клітчатій бумазі зображено квадрат зі стороною рівною n. Скільки в цьому квадраті можна намалювати різних а) квадратиків? б) прямокутників? в) букв «Г»?
4. В прямокутнику площі 5 розташовано 9 фігур площі 1 кожна. Доведіть, що знайдуться дві фігури, у яких площа загальної частини не менше 1\9.
5. Дан связный граф G с k рёбрами. Доказать, что можно занумеровать рёбра всеми числами 1, 2, …, k так, что для каждой вершины степени не меньшей двух, набор чисел, которыми помечены рёбра из этой вершины, имеет НОД, равный 1.

   (Підказка: робиться аналогічно до задачі про приватизацію залізничних доріг, тобто треба виділити дерево)

6. В городе N с любой станции метро можно проехать на любую другую (возможно, с пересадками). Докажите, что одну из станций метро можно закрыть на ремонт без права проезда через неё так, чтобы с любой из оставшихся станций можно было проехать на любую другую.

7. В группе из нескольких человек некоторые люди знакомы друг с другом, а некоторые – нет. Каждый вечер один из них устраивает ужин для всех своих знакомых и знакомит их друг с другом. После того как каждый человек устроил хотя бы один ужин, оказалось, что какие-то два человека всё ещё не знакомы. Докажите, что на следующем ужине им познакомиться тоже не удастся.

8. Доказать, что дерево (связный граф без циклов) – двудольный граф.

9. В некоторой группе людей у каждого есть ровно один враг и один друг. Докажите, что этих людей можно разбить на две компании так, что в каждой компании не будет ни врагов, ни друзей.

10. В компании из 2n+1 человек для любых n человек найдётся отличный от них человек, знакомый с каждым из них. Докажите, что в этой компании есть человек, знающий всех.

11. Знайти суму: $C_m^0 - C_m^1 + .. + (-1)^m C_m^m$.

12.

А) Довести: $1^2 + 2^2 + .. + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

Б) $1+3+..+(2n-1) = n^2$ ;

В) $1^2 + 3^2 + .. + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$;

Г) $\frac{1\cdot 4}{2\cdot 3} + \frac{2\cdot 5}{3\cdot 5} + .. + \frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+1)}{n+2}$.

13. На дошці записані $n$ чисел $x_1, x_2, ..., x_n$. Андрій та Богдан грають у таку гру, яка складається рівно з $n$ кроків. На кожному кроці Андрій обирає довільне число і віднімає це число від кожного із записаних на дошці чисел (тобто на дошці вже записані нові числа). Після цього Богдан замість кожного числа на дошці записує модуль цього числа. По завершенню гри ($n$ кроків) Андрій сплачує Богдану суму усіх записаних чисел у гривнях. Для кожного заданого набору чисел визначить яку найменшу суму може програти Андрій при правильній своїй грі.