Домашка 3

1. Є шаблон кута $35°$. Побудувати кут, що дорівнює $5°$.
2. Чи існують такі попарно різні цілі числа a, b, c, d, для яких виявляються рівними такі три дроби: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{ac+1}{bd+1}$?
3. За круглим столом сидять 31 людина – лицарі, які зажди кажуть правду, та брехуни, які завжди кажуть неправду. Кожного з присутніх запитали, про його двох сусідів – ліворуч та праворуч – „скільки серед його сусідів брехунів?” Кожна людина дала однакову відповідь. Скільки щонайбільше серед сидячих за столом максимум може бути лицарів, якщо відомо, що за столом принаймні є 1 лицар та 1 брехун?
4. Для заданих трьох натуральних чисел x, y, z Василь обчислив значення виразів: $A=xy-x-y$, $B=yz-y-z$ та $C=zx-z-x$. Виявилось, що $AB<0$. Який знак числа C?
5. У опуклому шестикутнику $ABCDEF$ усі кути рівні по $120°$ і відомі такі сторони $AB=2$, $CD=5$, $DE=7$ та $EF=1$. Знайдіть невідомі сторони шестикутника.
6. Чи можна розрізати квадрат 4×4 на 4 різні фігурки з набору, що наведений на рис. 1?
7. У трикутнику ABC проведена бісектриса BL, при цьому виявилось, що $BL=AB$. На продовженні BL за точку L вибрана така точка K, що $\angle BAK+\angle BAL=180°$. Доведіть, що $BK=BC$.
8. Знайдіть найменше натуральне число n, яке можна подати у вигляді $n=a^2+ab+b^2$, для деяких цілих чисел a, b, але не можна подати у вигляді $n=c^2-cd+d^2$, де c, d – цілі числа.

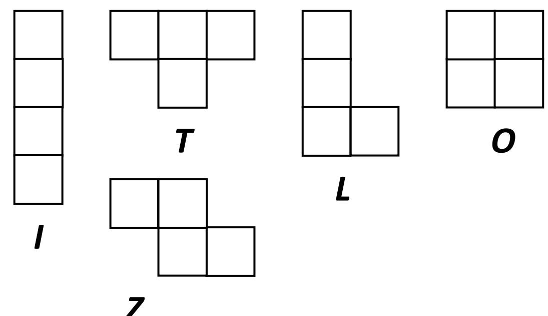

Рис. 1

9. У прямокутному трикутнику ABC з прямим кутом при вершині C на катеті вибрана точка M так, що $AM=BC$, а на катеті BC – точка N так, що $BN=MC$. Знайдіть кут між прямими AN та BM.
10. Чи можна дошку 5×5 замостити без накладань фігурками типу „куточок” та „зигзаг” (рис. 2)?

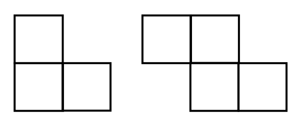
Рис. 2

11. На стороні AC трикутника ABC відмітили точки L і K так, що $AL=LK$, $\angle KBL=\angle KBC$. Виявилось, що $BC=2BL$. Доведіть, що $AB=KC$.
12. На дошці написані $n>2$ ненульових чисел. За один крок дозволяється вибрати з написаних два числа a і b та записати замість них числа $a+\frac{b}{2}$ та $b-\frac{a}{2}$. Чи можна після декількох кроків повернутися до початкового набору чисел?

13. Цілі числа a, b, c, d та A задовольняють рівності $a^2 + A = b^2$ і $c^2 + A = d^2$. Доведіть, що значення виразу $2(a+b)(c+d)(ac+bd-A)$ — квадрат цілого числа.