Теорія чисел 2

1. Доведіть, що наступні рівняння не мають розв'язків:
   а) $x^2+4y^2=2002$;
   б) $12x+5=y^2$;
   в) $-x^2+7y^3+6=0$;
   г) $x^2+y^2+c^2=1999$
   д) $15x^2-7y^2=9$;
   е) $x^2-5y+3=0$;
   ж) $x_1^4+...+x_{14}^4=1999$;
   з) $8x^3-13y^3=17$.
2. Розв'яжіть в натуральних числах рівняння: $1!+2!+..+m!=n^2$.
3. Є число n і ціле число a , що не має спільних дільників з числом n. Нехай k - найменше таке натуральне число, що $a^k\equiv 1\ (\mathrm{mod.}\ n)$. Нехай l - таке натуральне число, що $a^l\equiv 1\ (\mathrm{mod.}\ n)$. Доведіть, що $l \vdots k$.
4. Нехай для простого числа $p>2$ і цілого числа a , що не ділиться на p, виконане порівняння $x^2\equiv a\ (\mathrm{mod.}\ p)$. Доведіть, що $a^{(p-1)/2}\equiv 1\ (\mathrm{mod.}\ p)$.
5. Доведіть, що простих чисел виду $4k+1$ нескінченно багато. (підказка: [redacted])
6. Доведіть, що для простого $p=4k+1$ числа $x=\pm(2k)!$ є розв'язками порівняння $x^2+1\equiv 0\ (\mathrm{mod.\ p})$, до того ж інших розв'язків в множині остач нема.
7. Нехай p просте число більше 5. Доведіть, що якщо у порівняння $x^4+...+x^0\equiv 0\ (\mathrm{mod.}\ p)$ є розв'язки, то $p=5k+1$.
8. Розв'яжіть рівняння:
   а) $\varphi(x)=x/2$;
   б) $\varphi(x)=x/3$;
   г) $\varphi(x)=x/4$.