1) Довести, існує нескінченно багато n, що $2^n+2 \vdots n$.
2) Знайти всі прості p, що виконується $2^p+1 \vdots p$
3) Знайти всі прості p, що $(p-1)!+1=p^m$
4) Знайти всі натуральні n, що $(n+1)^3+(n+2)^3+(n+3)^3+(n+4)^3=(n+10)^3$
5) Довести рівняння $4xy-x-y=z^2$ не має розв»язків в натуральних числах, але має нескінченно багато в від»ємних цілих.
6) Розв»язати в цілих $y^2=x^3+(x+4)^2$
7) Знайти всі натуральні x та прості p, що $x \le 2p$ та $(p-1)^x+1 \vdots x^{p-1}$
8) Випишемо всі дільники чмсла n : $1=d_1<d_2<...<d_k=n$. Довести, $d_1d_2+d_2d_3+...+d_{k-1}d_k<n^2$. Та знайти всі n, для яких виписана сума є дільником числа n^2.
1) Доведіть, що в довільній послідовності з $pq+1$ різних дійсних чисел є або зростаюча підпослідовність з $p+1$ числа, або спадаюча підпослідовність з $q+1$ числа.*(Задача Ердьоша).*
9) В волейюольному турнірі приймають участь $2n$ команд. Кожна гра закінчується перемогою однієї з команд. Турнір було проведено в $2n-1$ день, кожен день кожна команда грала рівно одну гру, та по завершенню турніра кожен з кожним зіграв рівно 1 гру. Чи обов»язково можна вибрати кожного дня по одній команді, що виграла в цей день, так щоб всі вибрані команди були різними?
10) По колу стоять n різних предметів. Знайдіть кількість способів вибрати k з них, щоб жодні 2 з вибраних не стояли поруч.
11) Всі ребра зв»язного графа пофарбовані в 2 кольори. З кожної вершини виходить порівну ребер обох кольорів. Доведіть, що з довільної вершини до будь-якої іншої можна дістатись кожного разу змінюючи колір ребра.
12) На прямокутному столі лежать рівні картонні квадрати k різних кольорів, зі сторонами паралельними сторонам стола. Якщо розглянути довільні k квадратів різних кольорів, то деякі 2 з них можна прибити до столу одним цвяхом. Доведіть, що всі квадрати деякого кольору можна прибити до столу $2k-2$ цвяхами.
13) Чотирикутник $ABCD$ вписано в коло. l_a - пряма Сімсона точки A відносно трикутника BCD, прямі l_b, l_c, l_d визначаються аналогічно. Довести що ці прямі перетинаються в одній точці.
14) Доведіть, що прямі Ейлера трикутників ABC, HBC, AHC, ABH перетинаються в одній точці, де H – ортоцентр.
15) Дано трикутник ABC. AA_1, BB_1, CC_1 - його висоти. Довести, що прямі Ейлера трикутників $AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C$ перетинаються в точці P, що належить колу дев»яти точок трикутника ABC
16) Доведіть, що описане коло трикутника ABC дотикається до вписаного кола трикутника з вершинами в центрах зовнівписаних кіл трикутника ABC.

17) Довести, що пряма, яка ділить площу та периметр трикутника навпіл проходить через центр вписаного кола.

18) Дано трикутник ABC та точка M. Пряма, що проходить через M перетинає сторони, BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1. Прямі AM, BM, CM перетинають описане коло в A_2, B_2, C_2. Довести, що прямі A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 перетинаються в одній точці на описаному колі трикутника ABC.

19) Дано кут з вершиною A і коло, вписане в нього. Довільна пряма, яка дотикається до даного кола перетинає сторони кута в точках B, C. Довести, що описане коло трикутника ABC дотикається до фіксованого кола, вписаного в даний кут.

20) Задано трикутник ABC, точки E та F - точки дотику вписаного кола до сторін AC та AB, I - його центр, M - середина сторони BC. N - точка перетину EF та AM. X та Y другі точки перетину кола з діаметром BC з прямими BI та CI відповідно. Довести $\frac{NX}{NY} = \frac{AC}{AB}$.

21) Довести многочлен $x^n + 5x^{n-1} + 3$ - незвідний над $\mathbb{Z}$, де $n > 1$.

22) $a_1, \ldots a_n$ - різні цілі числа. Довести $(x - a_1) \ldots .(x - a_n) - 1$ - незвідний.

23) N - збалансоване, якщо в розкладі N парна кількість простих дільників (враховуючи кратність) $P(x) = (x+a)(x+b)$.

1)Довести існують a, b, $a \neq b$, що $P(1), P(2), \ldots P(50)$ - Збалансовані.

2)Довести, що коли $P(x)$ збалансоване для $\forall x \in \mathbb{N}$, то $a = b$.

24) Нехай $x_0 < x_1 < \ldots . < x_n \in \mathbb{Z}$. Довести, що серед значень многочлена степені n, з старшим коефіцієтом 1, в цих точках є таке, що по модулю не менше $\frac{n!}{2^n}$.

25) Знайти всі $P \in \mathbb{R}_{[x]}$, що для довільного x виконується $P(x)P(2x^2) = P(2x^3 + x)$.

26) p, q-многочлени, що мають хоч по одному дійсному кореню та $p(1 + x + q(x)^2) = q(1 + x + p(x)^2)$ для довільного $x \in \mathbb{R}$. Довести $p = q$.

27) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ та для довільних x, y виконується

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1$$

M 4. The sequence $\{a_n\}_{n \geq 1}$ is defined by

$$a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 24,\ a_n = \frac{6a_{n-1}^2 a_{n-3} - 8a_{n-1}a_{n-2}^2}{a_{n-2}a_{n-3}} \qquad (n \geq 4).$$

28) Show that a_n is an integer for all n, and show that $n | a_n$ for every $n \in \mathbb{N}$.

M 6. The sequence $\{a_n\}_{n\geq 1}$ is defined by

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = 2a_n + \sqrt{3a_n^2 + 1}.$$

Show that a_n is an integer for every n.

29)

O 7. Show that for each $n \geq 2$, there is a set S of n integers such that $(a-b)^2$ divides ab for every distinct $a, b \in S$.

30)

Довести, що число $p^p - 1$ має простий дільник, який конгруентний 1 по модулю p.

31)

15. Знайти всі трійки (a, b, c) натуральних чисел таких, що $1 < a < b < c$ і $(a-1)(b-1)(c-1) \mid abc - 1$.

32)

11. Нехай задано натуральне число n і відомо, що число $A = 2 + 2\sqrt{28n^2 + 1}$ — ціле. Довести, що A — повний квадрат.

33)

Знайти всі пари (m, n) натуральних чисел при яких число

$$\frac{n^3 + 1}{mn - 1}$$

ціле.

34)

720. За круглым столом сидят 100 представителей 50 стран, по двое от каждой страны. Докажите, что их можно разбить на две группы таким образом, что в каждой группе будет по одному представителю от каждой страны, и каждый человек находился в одной группе не более чем с одним своим соседом. *(С.Берлов)*

35)

598. В некоторых клетках доски $2n \times 2n$ стоят черные и белые фишки. С доски сначала снимаются все черные фишки, которые стоят в одной вертикали с какой-то белой, а затем все белые фишки, стоящие в одной горизонтали с какой-нибудь из оставшихся черных. Докажите, что либо черных, либо белых фишек на доске осталось не более n^2. *(С.Берлов)*

36)

7. Знайдіть найменше натуральне число n таке, що якщо n клітинок квадратної таблиці 1000×1000 пофарбовані, то знайдеться прямокутний трикутник з вершинами в центрах пофарбованих клітинок, з катетами паралельними до сторін таблиці.

37)

Дана трапеція з паралельними сторонами $AB > CD$. Точки K та L вибрані на відрізках AB та CD відповідно так, що $\frac{AK}{KB} = \frac{DL}{LC}$. Припустимо, що точки P та Q на відрізку KL задовольняють умову $\angle APB = \angle BCD$ і $\angle CQD = \angle ABC$. Доведіть, що точки P, Q, B, C лежать на одному колі.

38)

Всередині трикутника ABC відмічена точка P. Прямі CP та BP перетинають сторони AB та AC трикутника в точках N та M відповідно. Відомо, що $AB + BP = AC + CP$. Доведіть, що $AN + NP = AM + MP$.

39)

Дано трапецію $ABCD$ ($BC \parallel AD$). Коло S_1 проходить через точки A та B і дотикається до сторони CD в точці X. Коло S_2 проходить через точки C та D і дотикається до сторони AB в точці Y. Доведіть, що $\angle AXB = \angle CYD$.

40)

9. Дан випуклий чотирикутник $ABCD$; ABM, CDP – правильні трикутники побудовані зовні на сторах AB та CD; BCN, DAQ – правильні трикутники побудовані всередину на сторонах BC та DA. Доведіть, що $MNPQ$ – паралелограм.

10. У випуклому п'ятикутнику $ABCDE$ $\angle BAC = \angle CAD = \angle DAE$ і $\angle ABC = \angle ACD = \angle ADE$. Діагоналі BD та CE перетинаються в точці P. Доведіть, що AP проходить через середину CD.

41)

Всередині рівнобедреного трикутника ABC з кутом при вершині A рівним $110°$ відмічено таку точку D, що $\angle DAC = \angle DCA = 25°$. Знайдіть $\angle DBC$.

42)

Пряма, що проходить через інцентр I трикутника ABC перетинає сторони AB та BC в точках M та N відповідно так, що трикутник BMN гострокутний. На стороні AC відмічені точки K і L так, що $\angle ILA = \angle IMB$ і $\angle IKC = \angle INB$. Доведіть, що $AM + KL + CN = AC$.

43)

2. Точка M — середина дуги BC описанной окружности остроугольного треугольника ABC. Точка D — основание высоты из вершины B. Из точки M опустили перпендикуляры MX и MY на стороны AB и AC соответственно. Точку D отразили симметрично относительно прямой XY и получили точку D'. Докажите, что точка D' лежит на прямой BM.

44)

3. Для положительных чисел a, b и c докажите неравенство

$$\frac{a^7}{b^3c^2} + \frac{b^7}{c^3a^2} + \frac{c^7}{a^3b^2} \geqslant a^2 + b^2 + c^2.$$

45)

66. Из клетчатого квадрата 2008×2008 вырезали угловую клетку. Четно или нечетно количество способов разрезать образовавшуюся фигуру на уголки из трех клеток? (*С. Берлов*)

46)

00.76. a и b — различные натуральные числа, такие что $a^2 + b$ делится на $b^2 + a$ и $b^2 + a$ — степень простого числа. Найдите эти числа. (*С. Берлов*)

47)

01.68. Найдите все такие функции $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, что для любых целых x и y выполняется соотношение

$$f\big(x + y + f(y)\big) = f(x) + 2y\,. \qquad (\textit{Ф. Петров})$$

48)

I 11. $(x + y + z = 1,\ x, y, z > 0)$

$$\frac{x}{\sqrt{1-x}} + \frac{y}{\sqrt{1-y}} + \frac{z}{\sqrt{1-z}} \geq \sqrt{\frac{3}{2}}$$

49)

I 17. $(a, b, c > 0)$

$$\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} \geq \sqrt{a^2 + ac + c^2}$$

50)

1998) $(xyz = 1,\ x, y, z > 0)$

51) $$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{y^3}{(1+z)(1+x)} + \frac{z^3}{(1+x)(1+y)} \geq \frac{3}{4}$$

52) $$\frac{a^2}{a^2+2bc} + \frac{b^2}{b^2+2ca} + \frac{c^2}{c^2+2ab} \geq 1 \geq \frac{bc}{a^2+2bc} + \frac{ca}{b^2+2ca} + \frac{ab}{c^2+2ab}$$

$(a, b, c > 0)$

53) $$(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2}\right) \geq \frac{9}{4}$$

$(a, b, c > 0)$

54) $$\frac{ab}{c(c+a)} + \frac{bc}{a(a+b)} + \frac{ca}{b(b+c)} \geq \frac{a}{c+a} + \frac{b}{b+a} + \frac{c}{c+b}$$

$(a, b, c > 0)$

55) $$\sqrt{ab(a+b)} + \sqrt{bc(b+c)} + \sqrt{ca(c+a)} \geq \sqrt{4abc + (a+b)(b+c)(c+a)}$$

(**Лішунов В., Рубльов Б.**) Числа $1, 2, \ldots, n$ у деякому порядку розставлені в ряд. З ними дозволяється робити таку операцію: беруть довільні дві пари сусідніх елементів, які не мають спільних членів та міняють ці пари місцями. Чи завжди можна за скінченну кількість таких операцій одержати монотонний (зростаючий або спадний) набір чисел, якщо:

56) ***а)*** $n = 2009$; ***б)*** $n = 2010$?

3. (Петровський Дмитро) Для невід'ємних чисел a, b, c, таких що $a + b + c = 1$, доведіть нерівність:

57) $$\sqrt{1-a} + \sqrt{1-b} + \sqrt{1-c} \leq \sqrt{2}\left(\sqrt{ab+bc+ca} + 2\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right).$$

8. (Рибак Олександр) У ящику лежать іграшкові котики. У кожного котика голова пофарбована в один з 2011 кольорів, і хвіст також пофарбований в один з цих 2011 кольорів – можливо, у такий самий, а можливо, в інший. З ящика можна вибрати деяких котиків і скласти з них окремий набір. Набір вважається правильним, якщо він складається рівно з 2011 котиків, серед яких немає двох котиків з головами одного кольору і немає двох котиків з хвостами одного кольору. Відомо, що з ящика можна вибрати правильний набір більше, ніж в один спосіб. Довести, що у ящику можна залишити декількох котиків (можливо, всіх) таким чином, щоб вибрати правильний набір з цього ящика можна було

58) рівно в два способи.

11. Нехай $n \geqslant 3$ — натуральне число, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — попарно різні (тобто неспівпадаючі) підмножини множини $S = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Доведіть, що існує елемент $x \in S$ такий, що попарно різними є підмножини

59) $$A_1 \setminus \{x\},\ A_2 \setminus \{x\},\ \ldots,\ A_n \setminus \{x\}.$$

3. Нехай $p > 2$ — просте число, $k > 1$ — кількість фарб, $k-1$
та p взаємно прості. Довести, що кількість способів фарбування сторін
правильного p-кутника так, щоб сусідні сторони були пофарбовані в різні
60) кольори (многокутник повертати не можна), ділиться на $(k-1)p$.