

Задачі для підготовки до командної олімпіади, середня та старша ліги

1. Із деякої точки M , що лежить усередині даного кута з вершиною A , опущено перпендикуляри MP та MQ на сторони кута. Із точки A опущено перпендикуляр AK на відрізок PQ . Доведіть, що $\angle PAK = \angle MAQ$.
2. Скільки є способів поставити на шахову дошку вісім тур так, щоб вони не били одна одну?
3. Доведіть, що якщо m та n взаємно прості (не мають жодного спільного дільника, крім одиниці), то числа $n, 2n, 3n, \dots, (m-1)n, mn$ дають попарно різні остачі при діленні на m .
4. Для додатних a та b доведіть нерівності між середнім квадратичним, середнім арифметичним, середнім геометричним та середнім гармонічним двох чисел:
$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$
. Сформулюйте аналогічні нерівності для трьох чисел.
5. Для додатних x та y доведіть, що $x + \frac{1}{x} \geq 2$ та $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$.
6. Доведіть нерівність для додатних x, y та z : $\left(1 + \frac{x}{y}\right) \left(1 + \frac{y}{z}\right) \left(1 + \frac{z}{x}\right) \geq 8$.

Підказки до задач

1. Опишіть коло навколо $APMQ$.
2. Усі тури мають стояти в різних рядках і в різних стовпчиках. Спробуйте спершу поставити першу туру в перший стовпчик, потім другу туру в другий стовпчик, третю — в третій і т. д., рахуючи під час цього кількість можливих варіантів на даний момент.
3. Припустіть, що якісь два числа мають однакові остачі та розгляньте їхню різницю.
4. Доводьте три нерівності окремо. Кожен раз знадобиться піднести обидві частини до квадрата. В останній нерівності введіть нові змінні $c = \frac{1}{a}, d = \frac{1}{b}$.
5. Скористайтеся нерівністю між середнім арифметичним та середнім геометричним.
6. Розкрийте дужки та скористайтесь фактом із попередньої задачі.