Домашнее задание 09.11.14

1 Старое.

1. Зовнівписане коло ω_C трикутника ABC дотикається сторони AB і продовжень сторін BC і CA в точках M, N і P відповідно, а зовнівписане коло ω_B дотикається сторони AC і продовжень сторін AB і BC в точках S , Q і R відповідно. Нехай $X = MN \cup RS$, $Y = NP \cup RQ$. Доведіть, що точки X, Y і A лежать на одній прямій.
2. Нехай H — точка перетину висот AP і CQ гострокутного трикутника ABC. На медіані BM відмітили точки E і F так, що $\angle APE = \angle BAC$, $\angle CQF = \angle BCA$, причому точка E лежить всередині трикутника APB, а точка F — усередині трикутника CQB. Доведіть, що прямі AE, CF і BH перетинаються в одній точці.
3. Розглянемо ортогональні проекції вершин A, B, C трикутника ABC на бісектриси зовнішніх кутів $\angle ACB, \angle CAB, \angle ABC$. Нехай d — діаметр кола, що описане навколо трикутника з вершинами в основах перпендикулярів, а r та p — радіус вписаного кола та півпериметр трикутника ABC. Доведіть, що $p^2 + r^2 = d^2$.
4. **(Не на счёт.)** Нехай ABC — нерівнобедрений трикутник ($AC \neq BC$) і нехай $A'B'C$ — трикутний, отриманий після деякого повороту відносно C. Нехай M, E, F — середини відрізків BA', AC та CB' відповідно. Знайдіть кут $\angle EMF$, якщо $EM = MF$.

2 Новое

1. Знайдіть похідну функції $\sqrt{x}$ в точці x_0.
2. Доведіть, що
$$\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}.$$
3. Використовуючи рівність
$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1},$$
знайдіть коротку формулу для виразу
$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}.$$
4. Доведіть, що похідна непарної (парної) функції є функцією парною (непарною).
5. Функції f та g мають похідні в точці a. Знайдіть границю
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{x - a}.$$