Рекурентні рівняння-1

1. Розв'язати рекурентні рівняння:
   (a) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 3a_n$;
   (b) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 3a_n + 1$;
   (c) $a_1 = 3$, $a_{n+1} = a_n^2$;
   (d) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1 + a_n}$;
   (e) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{2a_n^2 + 1}$;
   (f) $a_1 = -1$, $a_2 = 7$, $a_{n+1} = 3a_n + a_{n-1}$;
   (g) $a_1 = 0$, $a_2 = 2$, $a_{n+1} = 5a_n + 6a_{n-1}$;
   (h) $a_1 = 3$, $a_2 = -3$, $a_{n+1} = 9a_{n-1} - 6a_n$;
   (i) $a_1 = 1$, $a_2 = -1$, $a_3 = 0$, $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n - 2a_{n-1}$.
   (j) $a_1 = 4$, $a_{n+1} = a_n^2 - 7a_n + 15$.
2. $a_1 = \dfrac{1}{2}$, $a_2 = \dfrac{1}{3}$, $a_n = \dfrac{a_{n-1}a_{n-2}}{3a_{n-2} - 2a_{n-1}}$. Знайти a_{145}.
3. $x_1 = 0$, $x_{n+1} = 5x_n + \sqrt{24x_n^2 + 1}$. Довести, що $x_n \in \mathbb{Z}$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.
4. Божевільний король хоче зафарбувати кожен поверх свого n -поверхового замку в один з двох кольорів: чорний або білий. І ще король з естетичних міркувань вирішив, що чорні поверхи не можуть йти підряд (тобто між двома чорними поверхами має бути принаймні один білий). Скількома способами він це зможе зробити?
5. Довести, що при всіх натуральних число n
   $$\left(\frac{3 + \sqrt{17}}{2}\right)^n + \left(\frac{3 - \sqrt{17}}{2}\right)^n$$
   є цілим і непарним.
6. Знайти кількість n-цифрових чисел, у записі яких використовуються лише цифри $1, 2, 3$ і в яких перша і остання, а також будь-які дві сусідні цифри різні.
7. Скількома способами прямокутник $2n \times 3$ можна замостити доміношками 2×1?
8. **Жабка–мандрівниця.** Тепер жабка стрибає по вершинам шестикутника $ABCDEF$, кожного разу переміщуючись в одну із сусідніх вершин. Скількома способами вона зможе потрапити з A в C за n стрибків?