Завдання та вказівки другого туру III етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики.

7-8 класи.

Задача1.

Довести, що число  ділиться на число .

***Вказівка.*** Позначимо . Тоді Задача 2. ***Вказівка.*** Спочатку з’єднати дві сусідні точки різного кольору, відкинути їх і знову так само з’єднувати.

Задача 3. ***Вказівка***. Звести задачу до підрахунку зафарбованих сторін клітинок. Сторона вважається зафарбованою, якщо обидві клітинки зафарбовані. Відповідь 60.

Задача 4. ***Вказівка***. Припустити, методом від супротивного, що дівчата танцювали з різною кількістю хлопчиків. Тоді дівчина могла танцювати з 0, 1, 2, …, 30 хлопчиків. Всього 0+1+2+…+30=15\*31. Треба відкинути один доданок, так, щоб одержана сума ділилась на 30. Таким числом є 15, а його не можна відкидати.

Задача 5. ***Вказівка***. Відбити симетрично точку відносно прямих  і і розглядаючи відповідні рівнобедрені трикутники довести, що кут  дорівнює куту .

9 клас.

Задача 1. ***Вказівка.*** Виграє дівчинка. Вона спочатку витирає всі числа кратні 3, вона встигає це зробити. Після цього грає довільним чином до останнього ходу, коли залишається три числа. Принаймні два з них дають однакову остачу при діленні на 3 – вона їх залишає, а стирає третє.

Задача 2. Див. зад. 4 8 клас.

Задача 3. Див. зад. 2 8 клас.

Задача 4. ***Вказівка.*** Припустити від супротивного. Тоді 

Додавши отримані вирази, отримаємо протиріччя.

Задача 5. ***Вказівка.*** Центр описаного кола  трикутника лежить на , а центр  трикутника лежить на . Довести, що центр  кола, описаного навколо  є точкою перетину висот трикутника . І висота цього трикутника проведена через  лежить на .

10 клас.

Задача 1. ***Вказівка.*** Див. задачу 3. 7-8 класи.

Задача 2. ***Вказівка.*** Див. задачу 1 клас 9.

Задача 3. ***Вказівка***. Див задача 5 9 клас.

Задача 4. ***Вказівка***. Параболи , перетинаються в точці перетину прямих . Задача зводиться до випадку перетину 4 прямих в 4 точках.

Задача 5. Оскільки  всі суми виду  невід’ємні. Тому при  маємо ланцюжок нерівностей. .

11 клас.

Задача 1. Див. зад. 1 9 клас.

Задача 2. Див. зад. 4. 10 клас.

Задача 3. Див. зад. 5 9 клас.

Задача 4. Див. зад 5 10 клас.

Задача 5. ***Вказівка***. Якщо  корені многочлена, то тоді . Цього не може бути, коли всі три числа по модулю більші, ніж 1. Значить, для деякого кореня виконується те, що треба довести.