## XIX олімпіада з математики Русанівського ліцею

**6 клас  I тур**  05 квітня 2014 р

**1.** Двоголові та семиголові дракони зібралися на нараду. На початку наради Король драконів підрахував кількість присутніх по головах. Своєю середньою головою він озирнувся навкруги та побачив 25 голів. Скільки всього драконів прийшло на нараду?

**2.** Число $k$ складається з цифр «1» і «2». Доведіть, що число $k$ + 2014 – складене.

**3.** Петрик одягнув чоботи-скороходи і вирушив з міста А в місто В. О $12^{\underline{00}}$ на відстані 20 км від міста А він знайшов килим-літак і вирішив продовжити шлях на ньому. За 10 км до міста В килим-літак зламався, і Петрику довелося закінчити шлях у чоботях. Внаслідок цього Петрик прибув до міста В рівно о $14^{\underline{00}}$. Скільки часу витратить Петрик на зворотний шлях, якщо відомо, що швидкість килима в 3 рази більша за швидкість чобіт?

**4.** У білому квадраті 5х5 клітинок маляр хоче пофарбувати деякі клітинки в зелений колір так, щоб у кожному квадраті 3х3 білих клітинок було більше, ніж зелених, а в кожному квадраті 4х4 зелених клітинок було більше, ніж білих. Чи зможе він це зробити?

**5.** На столі лежить 10 аркушів паперу. Хлопчик бере деякі з них і розриває на 10 шматочків. Потім деякі з них ще раз розриває на 10 шматочків і так далі. Чи зможе хлопчик у результаті своїх дій отримати 2014 шматочків?

**Єдина країна**
**Единая страна**

**Аккерманська фортеця**
**м. Белгород-Дністровський**

Розбір задач та підведення підсумків олімпіади 9 квітня о 15.30
І тур конкурсного приймання до 7 та 8 класів Русанівського ліцею (математика) 26 квітня о 10.00
Контактний телефон 517-38-46, e-mail:**info@rl.kiev.ua**, наш сайт:**www.rl.kiev.ua**

---

## XIX олімпіада з математики Русанівського ліцею

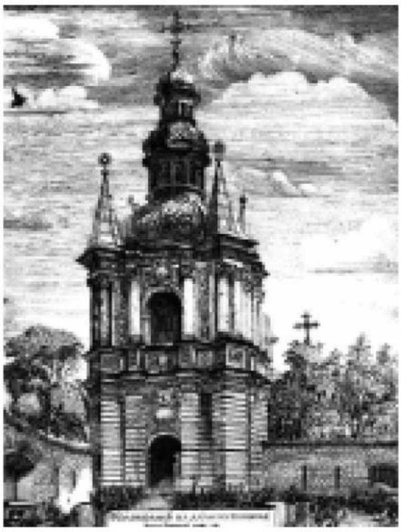
**6 клас  II тур**  05 квітня 2014 р.

**6.** Відомо, що серед тверджень $2x > 70$, $x < 100$, $4x > 25$, $x > 10$ і $x > 5$ для натурального числа $x$ є рівно два істинних і три хибних. Знайдіть $x$.

**7.** У Мексиці екологи домоглися прийняття закону, за яким кожний автомобіль хоча б один день на тиждень повинен відпочивати (власник повідомляє поліції номер автомобіля та «вихідний» день тижня цього автомобіля). У деякій сім’ї 8 дорослих, і вони всі бажають їздити на автомобілі щодня (кожний – у своїх справах). Яка найменша кількість автомобілів повинна бути в такій сім’ї?

**8.** Остап та Олеся разом зібрали не більше 70 грибів, з них 52% білих. Коли Олеся викинула три найменших гриба, то білі склали рівно половину всіх грибів. Скільки грибів зібрали Остап та Олеся?

**Єдина країна**
**Единая страна**



**Києво-Печерська лавра**

Розбір задач та підведення підсумків олімпіади 9 квітня о 15.30
І тур конкурсного приймання до 7 та 8 класів Русанівського ліцею (математика) 26 квітня о 10.00
Контактний телефон 517-38-46, e-mail:**info@rl.kiev.ua**, наш сайт:**www.rl.kiev.ua**

## XIX олімпіада з математики Русанівського ліцею

### 7 клас І тур

05 квітня 2014 р.

**1.** Чому дорівнює значення виразу $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{225}\right)$?

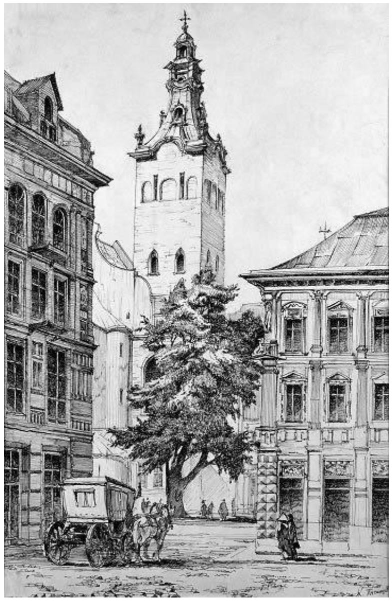
**2.** Марічка записала на дошці деякі 5 чисел. Григорій попарно додав ці числа та отримав такі 10 чисел: 0, 2, 4, 4, 6, 8, 9, 11, 13, 15. Які числа було записано на дошці?

**3.** Минулого року, спізнюючись на XVIII Русанівську олімпіаду, Наталка вирішила надолужити згаяний у заторі час та побігла вниз по ескалатору метро. Спускаючись зі швидкістю 2 сходинки за секунду, вона нарахувала на ескалаторі 140 сходинок. Сьогодні, у день XIX олімпіади, історія повторилася, однак цього разу Наталці загрожувало ще більше запізнення. Тим же ескалатором вона бігла швидше — 3 сходинки за секунду, а нарахувала на 28 сходинок більше. «Дивно виходить, — замислилася Наталка. — Чим швидше біжиш, тим довшим стає ескалатор». Скільки сходинок вона нарахує завтра, запізнюючись на IX олімпіаду з головоломок, якщо ескалатор зламається?

**4.** Нехай $K$ — точка дотику вписаного в трикутник $ABC$ кола до сторони $AC$. Із точки $K$ до сторони $BC$ проведено перпендикуляр, який перетнув бісектрису кута $ACB$ у точці $E$. Доведіть, що $KI = KE$, де $I$ — інцентр трикутника $ABC$. (*О. Карлюченко*)

**5.** Нехай $H$ — основа висоти, проведеної з вершини $A$ до сторони $BC$ трикутника $ABC$. Точка $L$ — основа бісектриси $\angle AHC$ у відповідному трикутнику, а $M$ — середина відрізка $AB$. Відновіть трикутник $ABC$ за точками $H$, $L$ та $M$. (*О. Грищенко*)

**Єдина країна**
**Единая страна**



**Старий Львів**

Розбір задач та підведення підсумків олімпіади 9 квітня о 15.30
І тур конкурсного приймання до 7 та 8 класів Русанівського ліцею (математика) 26 квітня о 10.00
Контактний телефон 517-38-46, e-mail:**info@rl.kiev.ua**, наш сайт:**www.rl.kiev.ua**

---

## XIX олімпіада з математики Русанівського ліцею

### 7 клас ІІ тур

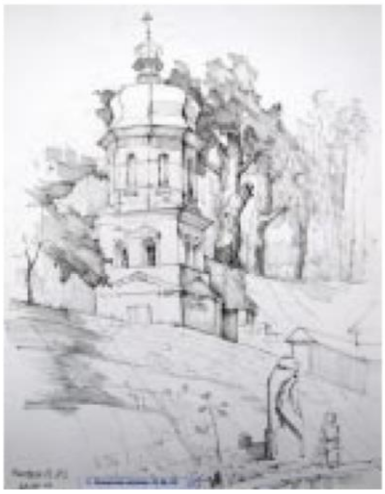
05 квітня 2014 р.

**6.** Одного разу в Простоквашино листоноша Пєчкін не хотів віддавати посилку. Тоді кіт Матроскін запропонував йому зіграти в таку гру: кожним своїм ходом листоноша пише в рядок зліва направо по одній букві, довільно чергуючи Р та Л, допоки в рядку не буде всього 11 букв. Матроскін після кожного його ходу, якщо хоче, може поміняти місцями будь-які дві літери. Якщо в кінці гри виявиться, що записане слово є паліндромом (тобто однаково читається зліва направо та справа наліво), то Пєчкіну доведеться віддати посилку. Чи зможе Матроскін грати в цю гру так, щоб гарантовано отримати посилку?

**7.** Серед 50 першокласників деякі знають усі букви, крім «р», яку просто пропускають у написанні слів, а інші знають усі букви, крім «б», яку теж пропускають. На уроці вчитель попросив 10 учнів написати слово «бак», 18 інших учнів — слово «рак», а решту — слово «брак». У результаті слова «бак» та «рак» виявилися написаними по 15 разів. Скільки першокласників написали своє слово правильно?

**8.** Відновіть трикутник $ABC$ за прямою $a$, яка містить сторону $BC$ трикутника, та точками $W$ та $D$. Точка $W$ є точкою перетину прямої, що містить бісектрису $\angle BAC$, з описаним навколо трикутника $ABC$ колом, а $D$ — діаметрально протилежна вершині $A$ точка описаного кола. (*С. Яковлєв*)

**Єдина країна**
**Единая страна**



**Іллінська церква**
**м. Чернігів**

Розбір задач та підведення підсумків олімпіади 9 квітня о 15.30
І тур конкурсного приймання до 7 та 8 класів Русанівського ліцею (математика) 26 квітня о 10.00
Контактний телефон 517-38-46, e-mail:**info@rl.kiev.ua**, наш сайт:**www.rl.kiev.ua**

## XIX олімпіада з математики Русанівського ліцею

## 8 клас

05 квітня 2014 р.

**Єдина країна**
**Единая страна**

**Острів Хортиця**
**Запорізька Січ**

**1.** В одному рядку розташовано $2014^2$ відкритих коробок. Хлопчик підходить до кожної другої коробки та закриває її. Потім підходить до кожної третьої та змінює її стан на протилежний (якщо коробка відкрита, то закриває її, якщо коробка закрита – відкриває). Потім підходить до кожної четвертої та виконує ті ж самі дії. Так він робить $2014^2$ разів. Скільки коробок у результаті таких дій залишаться відкритими?

**2.** Натуральні числа *a, b, c* такі, що $\frac{abc+a+c}{bc+1}=\frac{6045}{2014}$. Знайти $\frac{abc+a+c}{ab+1}$.

**3.** Яку найменшу кількість клітинок необхідно зафарбувати у квадраті 7х7 клітинок, щоб у кожному квадраті 4х4 було рівно 5 зафарбованих клітинок?

**4.** У рівнобедреному трикутнику *ABC* (*AB=AC*) точки *M* та *N* – основи медіани та висоти, проведених з вершин *C* та *B* відповідно, а *O* – центр кола, описаного навколо трикутника *AMN.* Точка *H* – середина *BC*. Виявилося, що *OH* є бісектрисою кута *BON*. Знайти кути трикутника *ABC*. (*М. Плотніков*)

**5.** Для точки *B* на відрізку *AC* знайшлися точки *D* та *E* такі, що *AD=BD=BC* та *AB=BE=EC*. Бісектриса кута *DBE* перетинає *DE* в точці *F*. Доведіть, що *AF=FC*. (*М. Плотніков*)

**6.** На площині дано точки *A* та *B*. Провели відрізок *AB* та будь-яку дугу з кінцями в *A* і *B*, меншу $180^{o}$. Усередині отриманого сегмента вибрали довільну точку *K*. Побудувати пряму через точку *K*, яка перетне дугу в точці *X*, а відрізок у точці *Y* так, що *XY=YB*. (*Є. Діомідов*)

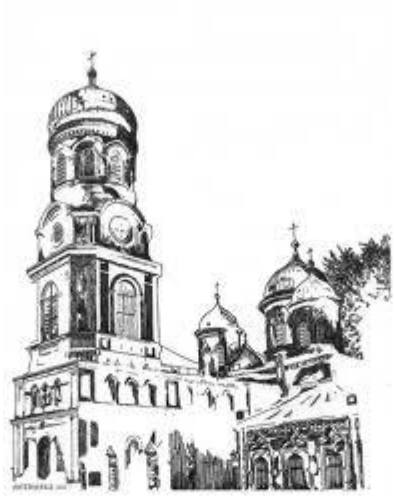
Розбір задач та підведення підсумків олімпіади 9 квітня о 15.30
І тур конкурсного приймання до 7 та 8 класів Русанівського ліцею (математика) 26 квітня о 10.00
Контактний телефон 517-38-46, e-mail:**info@rl.kiev.ua**, наш сайт:**www.rl.kiev.ua**

## XIX олімпіада з математики Русанівського ліцею

**9 – 10 класи**

05 квітня 2014 р

**Єдина країна**
**Единая страна**



**Троїцкий собор**
**м. Чернігів**

**1.** У банку, у якій живе колонія бактерій, потрапляє вірус. Щосекунди кожен вірус атакує по одній бактерії, після чого вона перетворюється на вірус; потім кожна бактерія, що вціліла, ділиться навпіл на дві бактерії. Чи виживе колонія бактерій?

**2.** Знайти всі натуральні числа, які можна подати у вигляді

$$\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b},$$

де *a*, *b* та *c* – попарно взаємно прості натуральні числа.

**3.** Знайдіть усі функції $f:R\to R$, які для довільних дійсних *x* та *y* задовольняють умові:

$$f(f(x+y))\cdot f(x)=f(x^2)+x\cdot f(y).$$

(*Д. Хілько, В. Вовченко*)

**4.** Обчислити суму:

$$\sum_{k=0}(-1)^k C_n^{2k}(\sin\alpha)^{2k}(\cos\alpha)^{n-2k},$$

де *n* – деяке натуральне число, $\alpha$ – довільний кут. (*Ф. Вієт*)

**5.** Відновити трикутник *ABC* за вершиною *A*, точкою $M_1$ – серединою відрізка *BC*, та точкою $K_1$ – точкою дотику вписаного кола до сторони *BC*. (*О. Карлюченко*)

**6.** На прямій, що проходить через центр кола *O*, зафіксовано точки *P* та *Q*, що не співпадають. Для довільного діаметра кола *AB* точка *X* є перетином прямих *AP* та *BQ*. Знайдіть геометричне місце точок *X*. (*Є. Діомідов, В. Калашніков*)

**7.** У тетраедрі *ABCD* плоскі кути *ADB*, *BDC* та *CDA* рівні між собою. На сторонах *BC*, *AC* та *AB* обрано такі точки $A_1$, $B_1$ та $C_1$ відповідно, що трикутники $DAA_1$, $DBB_1$ та $DCC_1$ мають найменші можливі периметри. Доведіть, що прямі $AA_1$, $BB_1$ та $CC_1$ перетинаються в одній точці. (*М. Плотніков*)

**8.** У трикутнику *ABC* позначимо *I* – центр вписаного кола, $M_1$ – середина сторони *BC*, $T_1$ – точка дотику зовнівписаного кола зі стороною *BC*, *N* – середина дуги *BAC* описаного кола трикутника. Пряма $IM_1$ вдруге перетинає коло, описане навколо трикутника *BIC*, у точці *K*. Доведіть, що пряма $KT_1$ ділить відрізок $NM_1$ навпіл. (*Д. Хілько*)


Розбір задач та підведення підсумків олімпіади 9 квітня о 15.30
І тур конкурсного приймання до 7 та 8 класів Русанівського ліцею (математика) 26 квітня о 10.00
Контактний телефон 517-38-46, e-mail:**info@rl.kiev.ua**, наш сайт:**www.rl.kiev.ua**