

Теорія чисел. Розігриваємось

1. Доведіть, що $17 \mid 2x + 3y$ тоді і тільки тоді, коли $17 \mid 9x + 5y$.
2. Нехай $\{a_1, a_2, \dots, a_{101}\}$ і $\{b_1, b_2, \dots, b_{101}\}$ — повні класи лишків за модулем 101. Чи може $\{a_1 b_1, a_2 b_2, \dots, a_{101} b_{101}\}$ бути повним класом лишків за модулем 101?
3. Доведіть, що для кожного $n \in \mathbb{N}$ існує n послідовних натуральних чисел, кожне з яких не буде степенем простого числа.
4. Доведіть, що для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ $\tau(n) \leq 2\sqrt{n}$.
5. Нехай a — непарне натуральне число. Доведіть, що $(a^{2^n} + 2^{2^n}, a^{2^m} + 2^{2^m}) = 1$, якщо $m \neq n$.
6. Доведіть, що для всіх парних $n \in \mathbb{N}$ $n^2 - 1 \mid 2^{n!} - 1$.
7. Доведіть, що $m!n!(m+n)! \mid (2m)!(2n)!$ для натуральних m, n .
8. Знайти усі прості числа p і q , що $pq \mid (5^p - 2^p)(5^q - 2^q)$.
9. Довести, що $n^5 + n^4 + 1$ не просте для всіх $n > 1$.
10. Знайти усі $a, b \in \mathbb{N}$ такі, що $a^4 + 4b^4$ є простим.
11. Знайти усі натуральні $n \in \mathbb{N}$, для яких існують $a, b \in \mathbb{Z}$ такі, що

$$n^2 = a + b, \quad n^3 = a^2 + b^2.$$

12. Скількома нулями закінчується число $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ для $n \in \mathbb{N}$?
13. Довести, що серед довільних n натуральних чисел знайдуться такі, сума яких кратна n .
14. Доведіть, що число 4,41 є повним квадратом в системі числення за будь-якою основою.
15. Зростаюча послідовність 1, 3, 4, 9, 10, 12, 13 складається з усіх натуральних чисел, які є степенями 3 або є сумою різних степенів 3. Знайти 100-ий член послідовності.
16. Доведіть, що $p \mid a^p + (p-1)!a$, якщо $p \in \mathbb{P}$, $a \in \mathbb{Z}$.
17. Доведіть, що існує $k \in \mathbb{N}$ таке, що число $k \cdot 2^n + 1$ буде складеним для будь-якого $n \in \mathbb{N}$.
18. Довести, що існує нескінченна кількість натуральних n , для яких $\varphi(n) = \frac{n}{3}$.
19. Для простого числа p і натурального $n < p$ доведіть конгруенцію

$$(n-1)!(p-n)! \equiv (-1)^n \pmod{p}.$$

20. Розв'язати рівняння в невід'ємних цілих числах

$$x + y + z + xyz = xy + yz + zx + 2.$$

21. Розв'язати рівняння в цілих числах

$$x^3 = y^3 + 2y^2 + 1.$$

22. Розв'язати рівняння в цілих числах

$$x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y) = 2.$$

23. Розв'язати рівняння в цілих числах

$$(x^2 + 1)(y^2 + 1) + 2(x-y)(1-xy) = 4(1+xy).$$