Теорія чисел

Сердюк Назар, nsaann@gmail.com

1. Доведіть, що існує нескінченно багато натуральних чисел n таких, що найбільший простий дільник n^4+1 більший за $2n$.

2. Нехай $p > q$ – натуральні числа і $\sqrt{p} - \sqrt{q} < 1$. Доведіть, що $pq \neq ab$ для будь-яких натуральних a, b з інтервала (q, p).

3. У послідовності натуральних чисел $\{a_n\}$, $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + [\sqrt{a_n}]$. Доведіть, що серед членів цієї послідовності нескінченно багато квадратів цілих чисел.

4. Нехай n – натуральне число і $a_1, a_2, \cdots, a_n$ – натуральні числа, не всі однакові. Доведіть, що існує нескінченно багато простих чисел p для яких $a_1^k + a_2^k + \cdots + a_n^k$ ділиться на p для деякого натурального k.

5. Знайдіть усі пари натуральних чисел (m, n) такі, що $m^{2\cdot 3^n} + m^{3^n} + 1$ ділиться на n.

6. Нехай a, b, k – натуральні числа, $n > 1$ – непарне натуральне число, p – непарне просте число та $a^n + b^n = p^k$. Доведіть, що $n = p^m$ для деякого натурального m.

7. Дано натуральні числа a, b, c, d такі, що $ab = cd$. Доведіть, що число $a + b + c + d$ складене.

8. Нехай f – многочллен з цілими коефіцієнтами, і p – просте число таке, що $f(0) = 0, f(1) = 1$ і $f(k) \equiv 0$ або $1 \mod p$ для усіх натуральних k. Доведіть, що степінь f не менша за $p - 1$.

9. Доведіть, що для будь-якого натурального n існують різні натуральні числа $a_1, a_2, \cdots, a_n$ такі, що $a_i - a_j$ ділить $a_i + a_j$ для $i \neq j$.

10. Дано цілі числа a та b такі, що $2^n a + b$ – це точний квадрат для будь-якого невід'ємного цілого числа n. Доведіть, що $a = 0$.

11. Дано послідовність натуральних чисел $\{r_n\}$ таку, що $r_1 = 2$ і $r_n = r_1 \cdot r_2 \cdots r_{n-1} + 1$ для $n \geq 2$. Доведіть, що якщо натуральні числа $a_1, a_2, \cdots, a_n$ такі, що $\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n} < 1$, то $\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n} \leq \frac{1}{r_1} + \cdots + \frac{1}{r_n}$.

12. а). Знайдіть усі пари натуральних (a, b) такі, що $a^2 + 1$ ділиться на $ab + a + b - 1$.
    б). Знайдіть усі пари натуральних (a, b) такі, що $a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1$ ділиться на $ab + a + b - 1$ і $ab + a + b - 1$ не ділиться на p^2 для будь-якого простого p.

13. Нехай $a < b < c < d$ – непарні натуральні числа, причому $ad = bc$, $a + d = 2^k$, $b + c = 2^m$ для деяких натуральних k, m. Доведіть, що $a = 1$.

14. Доведіть, що для будь-якого непарного $n \geq 3$ існують непарні натуральні числа x, y такі, що $7x^2 + y^2 = 2^n$.

15. Нехай $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_1 x + 1$ де $a_i = a_{n-i}$ – натуральні числа, $n \geq 2$. Доведіть, що існує нескінченно багато пар натуральних чисел x, y таких, що $y | P(x)$ і $x | P(y)$.

16. Нехай a, b, c – натуральні числа такі, що $c(c^2 - c + 1)$ ділиться на ab і $a + b$ ділиться на $c^2 + 1$. Доведіть, що $\{a, b\} = \{c, c^2 - c + 1\}$.

17. Нехай p – просте і $a_1, a_2, \cdots, a_{p+1}$ – різні натуральні числа. Доведіть, що існують індекси $i, j \leq p + 1$ такі, що $\frac{\max\{a_i, a_j\}}{\gcd(a_i, a_j)} \geq p + 1$.