

Симедіана і антипаралельність

Симедіана – пряма, що симетрична медіані відносно бісектриси з того ж кута, з якого виходить медіана.

Є дві прямі AB та AC . B_1C_1 є **антипаралеллю** до BC відносно прямих AB та AC (B_1 та C_1 належать прямим AB та AC відповідно) якщо $\angle AC_1B = \angle ABC$.

1. Доведіть, що відрізки B_1C_1 та BC є антипаралельними тоді і лише тоді, коли трикутники ABC та AB_1C_1 подібні та прямі B_1C_1 , BC не є паралельними.
2. B_1, C_1, B, C - різні точки. Доведіть, що B_1C_1 та BC є антипаралельними тоді і лише тоді, коли B_1, C_1, B, C - циклічні.
3. Доведіть, що кожна пара точок, що є основами висот в трикутнику є антипаралеллю до відповідної сторони.
4. Нехай B', C' - точки на прямих AB та AC такі, що відрізки $B'C'$ та BC паралельні. Доведіть, що відрізки $B'C'$ та B_1C_1 антипаралельні тоді і лише тоді, коли BC та B_1C_1 є антипаралельними.
5. В трикутнику ABC проведений відрізок B_1C_1 антипаралельний до BC . Доведіть, що AS - симедіана тоді і лише тоді, коли вона ділить навпіл B_1C_1 .
6. Нехай точка S належить стороні BC трикутника ABC . Доведіть, що наступні твердження еквівалентні:
 - а) AS - симедіана;
 - б) $\frac{d(S; AB)}{d(S; AC)} = \frac{c}{b}$ ($d(A, l)$ - відстань від точки A до прямої l);
 - в) $\frac{S_{ABS}}{S_{ACS}} = \frac{c^2}{b^2}$;
 - г) $\frac{d(B; AS)}{d(C; AS)} = \frac{c^2}{b^2}$;
 - д) $\frac{BS}{CS} = \frac{c^2}{b^2}$.
7. (Корисна конструкція) Є гострокутний трикутник ABC . І точка X всередині нього так, що $\angle BAX = \angle ACX$, $\angle CAX = \angle ABX$. Доведіть, що X - належить симедіані.
8. Доведіть, що вище згадана точка X належить описаному колу навколо трикутника BOC (O - центр описаного кола).
9. **Гармонічний чотирикутник** – чотирикутник у якого добутки протилежних сторін рівні. Нехай точка D - належить дузі BC (тій, що не містить точку A). Доведіть, що пряма AD - містить симедіану трикутника ABC тоді і лише тоді, коли чотирикутник $ABCD$ гармонічний.
10. В умові задачі 9 доведіть, що точка D належить колу Аполонія для точок B і C , що проходить через точку A .
11. Доведіть, що для задачі 9, точка X з задачі 7 є серединою відрізка AD .