

Діофантові рівняння-3

«Cubum autem in duos cubos, aut quadrato-quadratum in duos quadrato-quadratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duas ejusdem nominis fas est dividere; cujus rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.»

Petrus de Fermat

Розв'язати рівняння (якщо не сказано інше):

1. $x^3 + (x + 1)^3 + \dots + (x + 7)^3 = y^3$ в \mathbb{Z} .
2. $(x + 2)^4 - x^4 = y^3$ в \mathbb{N} .
3. При яких $a \in \mathbb{N}$ існують $x, y \in \mathbb{N}$ такі, що $x^2 + y^2 = axy$?
4. $p > 3$ — задане просте число. Розв'язати в \mathbb{N} : $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = p$.
5. $x^4 + xy^2 - 72 = 0$ в \mathbb{Z} .
6. $x - y^4 = 4$, де $y \in \mathbb{N}$, x — просте.
7. $xy + x^2y^2 - 72 = 0$ в \mathbb{Z} .
8. $x^2 + 3y^2 = 36 - 4xy$ в \mathbb{Z} .
9. $x^2 + y^2 = 2z^2$ в \mathbb{N} .
10. $x^{-2} + y^{-2} = z^{-2}$ в \mathbb{N} .
11. $x^3 + 2y^3 = 4z^3$ в \mathbb{N} .
12. $x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz = 0$ в \mathbb{Z} .
13. $x^2 - y^2 = 2xyz$ в \mathbb{N} .
14. $x^4 + y^4 + z^4 = 9u^4$ в \mathbb{N} .
15. Довести, що система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ x^2 - y^2 = w^2 \end{cases}$$

не має розв'язків в \mathbb{N} .

16. Доведіть, що при натуральному $n > 2$ рівняння $x^n + y^n = z^n$ не має розв'язків в натуральних числах.