The 6$^{\text{th}}$ Romanian Master of Mathematics Competition

Day 1: Friday, March 1, 2013, Bucharest

Language: Ukrainian

Problem 1. Для натурального числа a, визначимо послідовність натуральних чисел $x_1, x_2, \ldots$ умовами $x_1 = a$ і $x_{n+1} = 2x_n + 1$ для $n \geq 1$. Нехай $y_n = 2^{x_n} - 1$. Знайдіть найбільше можливе число k таке, що для деякого натурального a, числа $y_1, \ldots, y_k$ є простими.

Problem 2. Чи існує така пара функцій $g, h \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, що єдиною функцією $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, яка одночасно задовольняє умови $f(g(x)) = g(f(x))$ і $f(h(x)) = h(f(x))$ для всіх $x \in \mathbb{R}$, є тотожня функція $f(x) \equiv x$?

Problem 3. У коло ω вписано чотирикутник $ABCD$. Прямі AB та CD перетинаються в точці P, прямі AD і BC в точці Q, а діагоналі AC і BD в точці R. Через M позначимо середину відрізку PQ, а через K точку перетину відрізку MR і кола ω. Доведіть, що описане коло трикутника KPQ дотикається кола ω.

Кожна задача оцінюється в 7 балів.
Тривалість туру: $4\frac{1}{2}$ години.

The 6$^{\text{th}}$ Romanian Master of Mathematics Competition

Day 2: Saturday, March 2, 2013, Bucharest

Language: Ukrainian

Задача 4. Нехай P та P' — два опуклі чотирикутники на площині і точка O лежить всередині або на границі кожного з них. Припустимо, що для будь-якої прямої ℓ, що проходить через O, відрізок, який утворюється при перетині ℓ та P, довший за відрізок, який утворюється при перетині ℓ та P'. Чи може відношення площі P' до площі P бути більшим за 1.9?

Задача 5. Задано натуральне число $k \geq 2$. Нехай $a_1 = 1$ та для будь-якого натурального $n \geq 2$ через a_n позначимо найменше $x > a_{n-1}$ таке, що:

$$x = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left\lfloor \sqrt[k]{\frac{x}{a_i}} \right\rfloor .$$

Доведіть, що будь-яке просте число зустрічається у послідовності $a_1, a_2, \ldots$.

Задача 6. $2n$ різних монет розташовано у вершинах правильного $2n-$кутника, по одній монеті у кожній вершині. За *хід* обирається одна зі сторін $2n-$кутника та міняються місцями дві монети, що лежать на кінцях обраної сторони. Припустимо, що після скінченної кількості ходів кожна пара монет була поміняна місцями рівно один раз. Доведіть, що деяка сторона не була обрана жодного разу.

Кожна задача оцінюється в 7 балів.
Тривалість туру: $4\frac{1}{2}$ години.