Мала теорема Ферма—2

Мала теорема Ферма. Якщо p — просте число і $(x, p) = 1$, то

$$x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

1. Відомо, що $a^{12} + b^{12} + c^{12} + d^{12} + e^{12} + f^{12} \vdots 13$. Довести, що $abcdef \vdots 13^6$.
2. Чи буде простим число $257^{1092} + 1092$?
3. Довести, що якщо $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$, де p — непарне просте число, то
$$p \equiv 1 \pmod{4}.$$
4. Довести, що якщо p — просте, то $\underbrace{11\ldots1}_{p}\underbrace{22\ldots2}_{p}\underbrace{33\ldots3}_{p}\ldots\underbrace{99\ldots9}_{p} \vdots p$.
5. Довести, що $11 \cdot 13 \cdot 61 | 20^{120} - 1$.
6. Нехай p — просте. Довести, що якщо q — простий дільник числа $2^p - 1$, то $p | q - 1$.
7. **Критерій Вільсона.**
Число p — просте тоді і тільки тоді, коли
$$(p-1)! + 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$
8. Довести, що для будь-якого простого числа $p > 3$ число $3^p - 2^p - 1$ ділиться на $42p$.