

# Функціональні рівняння: підстановки, ін'єктивність, сюр'єктивність

Літній математичний табір "Контора  $\pi$ "  
Середня група

**Задача 1.** Знайдіть всі функції  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  такі, що для довільних  $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(f(x) + y) = 2x + f(f(y) - x).$$

**Задача 2.** Знайдіть всі функції  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  такі, що для довільних  $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(f(x) + y) = f(x^2 - y) + 4f(x)y.$$

**Задача 3.** Знайдіть всі функції  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  такі, що для довільних  $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(xf(x) + f(y)) = (f(x))^2 + y.$$

**Задача 4.** Знайдіть всі функції  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  такі, що для довільних  $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x + yf(x)) = f(f(x)) + xf(y).$$

**Задача 5.** Знайдіть всі функції  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  такі, що для довільних  $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(xf(y) + x) = xy + f(x).$$

**Задача 6.** Знайдіть всі функції  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  такі, що для довільних  $x, y \in \mathbb{R}_+$

$$f(x + f(y)) = f(x + y) + f(y).$$

**Задача 7.** Знайдіть всі функції  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  такі, що для довільних  $x, y \in \mathbb{R}_+$

$$x^2(f(x) + f(y)) = (x + y)f(yf(x)).$$

**Задача 8.** Знайдіть всі функції  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  такі, що для довільних  $x, y \in \mathbb{R}_+$

$$f(x)f(yf(x)) = f(x + y).$$

**Задача 9.** Знайдіть всі функції  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  такі, що для довільних  $x > y > 0$

$$f(x) = f(y)f\left(\frac{x - y}{f(y)}\right).$$

**Задача 10.** Знайдіть всі функції  $f : \mathbb{Q}_+ \rightarrow \mathbb{Q}_+$  такі, що для довільних  $x, y \in \mathbb{Q}_+$

$$f(f(x)^2y) = x^3f(xy).$$

**Задача 11.** Знайдіть всі функції  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  такі, що для довільних  $x, y \in \mathbb{R}_+$

$$f(x)f(y) = 2f(x + yf(x)).$$

Хілько Данило  
dkhilko@ukr.net