Міністерство освіти і науки, молоді та спорту
Інститут інноваційних технологій та змісту освіти
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

LI Всеукраїнська олімпіада 2010–2011 років
Умови та розв'язки по усіх класах

Перший день

8 клас

1. (Рубльов Богдан) Знайдіть усі пари цілих чисел (x, y), що задовольняють рівність:

$$\Big|x + \big|x + |x|\big|\Big| \cdot \Big|\big||-y| - y\big| - y\Big| = 2011.$$

Відповідь: $x = -1, y = 2011$ та $x = -2011, y = 1$.

Розв'язання. Оскільки число 2011 – просте, то кожний з множників у лівій частині рівняння повинен дорівнювати або 1, або 2011.

При $x \geq 0$ перший множник дорівнює $3x$, тому розв'язків немає. Аналогічно, при $y \leq 0$ другий множник дорівнює $-3y$, і також розв'язків немає.

Нехай тепер $x < 0$ та $y > 0$, тоді:

$$\Big|x + \big|x + |x|\big|\Big| \cdot \Big|\big||-y| - y\big| - y\Big| = \big|x + |x - x|\big| \cdot \big||y - y| - y\big| = |x| \cdot |-y| = -xy = 2011.$$

Вже звідси з простоти числа 2011 знаходимо наведені відповіді.

2. (Рожкова Марія) У трикутнику ABC кут A вдвічі більший від кута B, CD – бісектриса кута C. Доведіть, що $BC = AC + AD$.

Розв'язання. Побудуємо пряму AE, яка перпендикулярна до прямої CD (точка E належить стороні BC). Тоді $\triangle ACE$ рівнобедрений (бісектриса кута C є водночас висотою трикутника) (рис.1). Тому $AC = CE$. $\triangle ADE$ рівнобедрений, бо пряма CD перпендикулярна до AE і ділить сторону AE навпіл (висота є медіаною). Маємо:

$$AD = DE. \qquad (1)$$

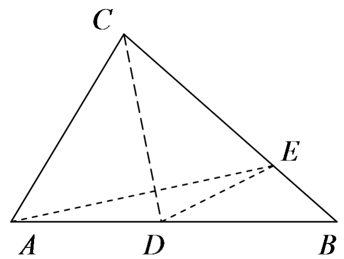

Рис. 1

Нехай $\angle B = \alpha$, $\angle A = 2\alpha$, $\angle C = 180° - 3\alpha$. Тоді маємо, що $\angle ADC = \alpha + 90° - \frac{3\alpha}{2} = 90° - \frac{\alpha}{2}$. Тоді $\angle ADE = 180° - \alpha$, отже $\angle EDB = \alpha = \angle B$, тому $\triangle DEB$ рівнобедрений, звідки

$$BE = DE. \qquad (2)$$

З (1) і (2) випливає, що $AD = BE$. Остаточно маємо, що $BC = CE + BE = AC + AD$.

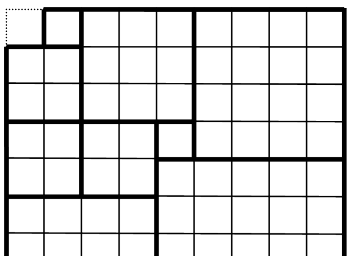
Рис. 2

3. (Сенін Віталій) Для попарно різних натуральних чисел a, b, c, d число $ab + cd$ ділиться націло на число $ac + bd$. Доведіть, що число $ac + bd$ складене.

Розв'язання. Методом від супротивного. Припустимо, що число $(ac + bd)$ – просте. Тоді $(ac + bd) \,|\, (ab + cd) \Rightarrow (ac + bd) \,|\, (ac+bd+ab+cd) = (a+d)(b+c)$, тому $(ac+bd) \,|\, (a+d)$ або $(ac+bd) \,|\, (b+c)$. Але при різних числах a, b, c, d це неможливо, оскільки $(ac + bd) > (a + d)$ та $(ac + bd) > (b + c)$. Одержана суперечність завершує доведення.

4. (Чорний Максим) З квадрата розміром 2011×2011 вирізали одну кутову клітинку. Чи можна фігуру, що утворилась, розрізати вздовж ліній сітки на квадрати, кількість яких не перевищує 120?

Відповідь: так.

Розв'язання. Будемо позначати $a \to x$, якщо квадрат $a \times a$, з якого вирізано одну кутову клітинку, можна розрізати на x квадратів уздовж ліній сітки.
Очевидно, що $2 \to 3$. Також помітимо, що $7 \to 8$ та $9 \to 9$ (рис.2 та 3):

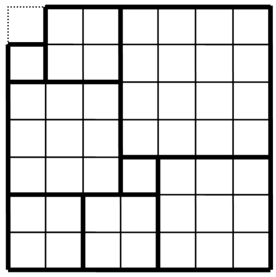

Рис. 3

Покажемо, що якщо $a \to x$ та $b \to y$, то $ab \to x + y$. Дійсно, квадрат зі стороною ab і вирізаною клітинкою можна розрізати на квадрат зі стороною b і вирізаною клітинкою, який розбивається на y квадратів, та квадрат зі стороною ab, від кута якого відрізано квадрат зі стороною b.

Його можна розбити на x квадратів, адже це той самий квадрат зі стороною a і вирізаною клітинкою, але збільшений в b разів за стороною. Отже, квадрат зі стороною ab без клітинки розбивається на $x + y$ квадратів. Звідси ж випливає, що якщо

$$a \to x \qquad \Rightarrow \qquad 2a \to x + 3. \qquad (*)$$

Покажемо, що якщо

$$a \to x \qquad \Rightarrow \qquad 2a - 1 \to 2x + 2. \qquad (**)$$

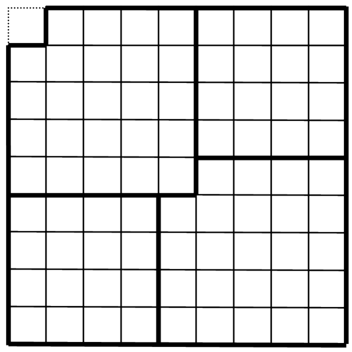

Рис. 4

Дійсно, "неповний" квадрат розбивається на 2 квадрати зі стороною $a-1$ та 2 "неповні" квадрати зі стороною a (рис.4).

А тому: $7 \to 8$, $9 \to 9$, $63 \to 17$, $126 \to 20$, $252 \to 23$, $503 \to 48$, $1006 \to 51$, $2011 \to 104$. Таким чином, користуючись (*) та (**), ми показали, що початкова фігура розбивається на $104 < 120$ квадратів.

9 клас

1. (Рубльов Богдан) Розв'язати рівняння:

$$\big[|x|\big] = \big|[x]\big|,$$

де $[a]$ – це ціла частина числа a, тобто найбільше ціле число, що не перевищує a.

Відповідь: Усі невід'ємні та цілі від'ємні числа.

Розв'язання. Розглянемо 3 випадки.

1) $x \geq 0$, тоді $|x| = x$, $[x] \geq 0$, і тому $\big|[x]\big| = [x] = \big[|x|\big]$, тобто кожне невід'ємне x є розв'язком рівняння.

2) x – ціле від'ємне, тоді $[x] = x$, $[-x] = -x$, $|x| = -x$, і знову виконується рівність $\big[|x|\big] = [-x] = -x = |x| = \big|[x]\big|$, тобто і ці значення є коренями рівняння.

3) x – від'ємне, але не ціле, тоді $|x| = -x$, $\big[|x|\big] < -x$. З іншого боку, $[x] < x < 0$, $\big|[x]\big| > -x$, тобто рівність не задовольняється.

2. (Рубльов Богдан) У опуклому 100-кутнику відмітили усі його вершини, а також декілька точок усередині цього багатокутника. Жодні три з відмічених точок не лежать на одній прямій. Відмічені точки з'єднали між собою таким чином, що багатокутник виявився повністю розбитим на 2011 опуклих багатокутників. Доведіть, що принаймні один із цих багатокутників має парну кількість сторін.

Розв'язання. Обчислимо число N, яке складається з суми усіх чисел e_j, де послідовно додаються усі сторони кожного багатокутника. Тоді це число є парним, оскільки воно складається з числа 100, а також подвоєної кількості усіх відрізків, які були проведені всередині заданого 100-кутника, оскільки кожний такий відрізок рахується двічі. Але усього доданків e_j рівно 2011 (непарна кількість), а тому якщо кожний з них непарний, то й сума буде непарною, що суперечить парності числа N. Тому припущення про непарність усіх доданків хибне, що й завершує доведення.

3. (Петровський Дмитро) Для невід'ємних чисел a, b, c, таких що $a + b + c = 1$, доведіть нерівність:

$$\sqrt{1-a} + \sqrt{1-b} + \sqrt{1-c} \le \sqrt{2}\left(\sqrt{ab+bc+ca} + 2\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right).$$

Розв'язання. З нерівності Коші–Буняковського для наборів $(\sqrt{\alpha}, \sqrt{\beta}, \sqrt{\gamma})$ та $(\sqrt{\alpha x}, \sqrt{\beta y}, \sqrt{\gamma z})$ маємо:

$$(\alpha\sqrt{x} + \beta\sqrt{y} + \gamma\sqrt{z}) \le \sqrt{(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha x + \beta y + \gamma z)},$$

тому

$$a\sqrt{a+b} + b\sqrt{b+c} + c\sqrt{c+a} \le$$
$$\le \sqrt{(a+b+c)(a^2+ab+b^2+bc+c^2+ca)} \le \sqrt{2(a^2+b^2+c^2)},$$

аналогічно,

$$b\sqrt{a+b} + c\sqrt{b+c} + a\sqrt{c+a} \le \sqrt{2(a^2+b^2+c^2)},$$

і нарешті,

$$c\sqrt{a+b} + a\sqrt{b+c} + b\sqrt{c+a} \le \sqrt{2(ab+bc+ca)}.$$

Залишається додати усі одержані нерівності.

4. (Ясінський В'ячеслав) На сторонах XY, YZ та ZX трикутника XYZ позначили відповідно точки C, E та A. На відрізках AX, CY та EZ відповідно відмітили точки B, D та F таким чином, що $BC \parallel AD$, $DE \parallel CF$, $AF \parallel BE$. Чи може статися так, що прямі XF, YB і ZD перетнуться в одній точці?

Відповідь: Ні, не може.

Розв'язання. Припустимо, що це можливо (рис.5). Нехай O – точка перетину прямих XF, YB і ZD, тоді за теоремою Чеви:

$$\frac{YD}{DX} \cdot \frac{XB}{BZ} \cdot \frac{ZF}{FY} = 1.$$

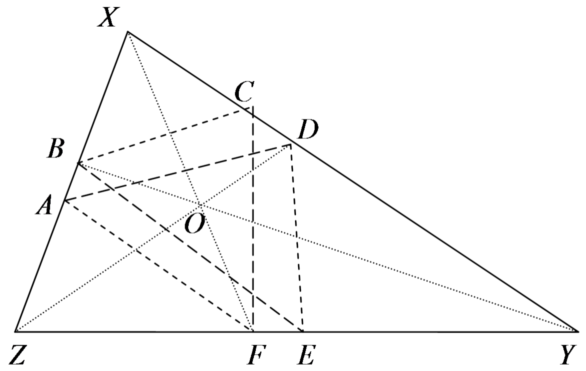

Рис. 5

З іншого боку, використовуючи узагальнену теорему Фалеса, одержуємо:

$$\frac{YD}{DX} = \frac{YD}{CD} \cdot \frac{CD}{DX} = \frac{YE}{EF} \cdot \frac{CD}{DX},$$

$$\frac{XB}{BZ} = \frac{XB}{AB} \cdot \frac{AB}{BZ} = \frac{XC}{CD} \cdot \frac{AB}{BZ},$$

$$\frac{ZF}{FY} = \frac{ZF}{FE} \cdot \frac{FE}{FY} = \frac{ZA}{AB} \cdot \frac{FE}{FY}.$$

Таким чином,

$$1 = \frac{YD}{DX} \cdot \frac{XB}{BZ} \cdot \frac{ZF}{FY} = \left(\frac{YE}{EF} \cdot \frac{CD}{DX}\right) \cdot \left(\frac{XC}{CD} \cdot \frac{AB}{BZ}\right) \cdot \left(\frac{ZA}{AB} \cdot \frac{FE}{FY}\right) = \frac{YE}{YF} \cdot \frac{XC}{XD} \cdot \frac{ZA}{ZB} < 1,$$

бо кожний із дробів $\frac{YE}{YF}$, $\frac{XC}{XD}$ і $\frac{ZA}{ZB}$ менший за 1. Одержане протиріччя і доводить, що прямі XF, YB і ZD не перетинаються.

10 клас

1. $\boxed{\textbf{Лейфура Валентин}}$ Дійсні числа x, y задовольняють умову:

$$x^2 + 3xy + 4y^2 \leq \frac{7}{2}.$$

Доведіть, що $x + y \leq 2$.

Розв'язання. Позначимо через $t = x + y$, підставимо у задану нерівність $x = t - y$, тоді ця нерівність набуває такого вигляду: $(t-y)^2 + 3(t-y)y + 4y^2 - \frac{7}{2} \leq 0$ або

$$2y^2 + ty + t^2 - \frac{7}{2} \leq 0.$$

Оскільки ця квадратна нерівність повинна приймати недодатні значення, то дискримінант відповідного квадратного тричлена повинен бути невід'ємним, тобто

$$D = 28 - 7t^2 \geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad t^2 \leq 4.$$

Таким чином, найбільше можливе значення для t – це 2, таким чином $t = x + y \leq 2$, що й треба було довести.

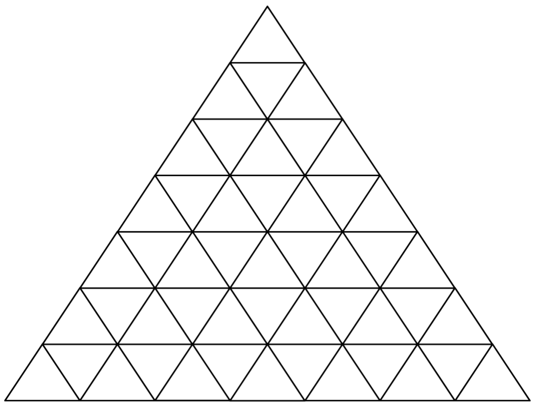

Рис. 6

2. (Ясінський В'ячеслав) Правильний трикутник зі стороною 7 поділено на 49 маленьких правильних одиничних трикутничків так, як показано на рис.6. Із нього вирізають уздовж ліній сітки паралелограми, одна сторона яких дорівнює 1, а друга дорівнює 2.
Яку найбільшу кількість таких паралелограмів можна вирізати?

Відповідь: 10.

Розв'язання. Розфарбуємо даний трикутник у "шаховому" порядку так, як це зроблено на рис.7.

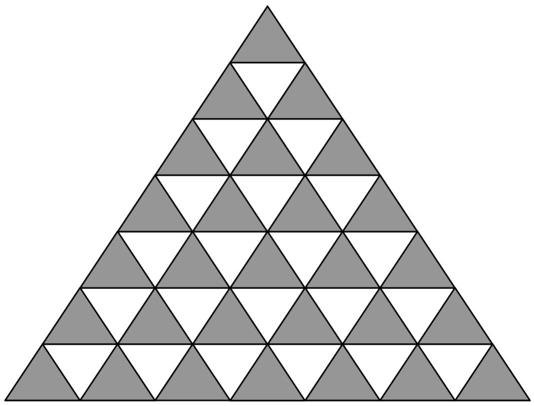

Рис. 7

Оскільки кожний вирізаний паралелограм складається із двох білих одиничних трикутничків, а їх всього 21 на даному трикутнику, то число усіх вирізаних паралелограмів не перевищує 10.

Якщо їх буде вирізано 11 або більше, то всього буде вирізано $2 \cdot 11 = 22$ білих одиничних трикутнички або більше, чого не може бути, бо їх всього 21. Як саме можна вирізати рівно 10 потрібних паралелограмів, показано на рис. 8.

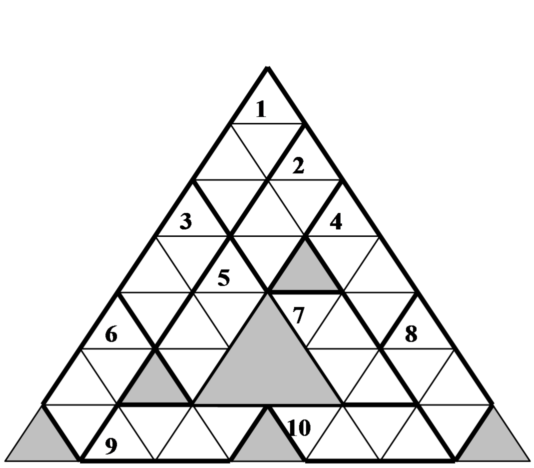

Рис. 8

3. (Сенін Віталій) Для натурального числа $N = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_n^{a_n}$, поданого у вигляді канонічного розкладу (p_i – прості та попарно різні, a_i – натуральні, $1 \leq i \leq n$), уведемо позначення $T(N) = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Для деяких попарно різних натуральних чисел a, b, c, d число $ab + cd$ ділиться націло на число $ac + bd$. Доведіть, що $T(ab + cd) \geq 3$.

Розв'язання. Від супротивного, припустимо, що $T(ab + cd) \leq 2$.

Лема. Відомо, що $(ac+bd)|(ab+cd)$ для попарно різних натуральних a, b, c, d. Тоді число $(ac+bd)$ – складене.

Доведення леми. Нехай $ac+bd$ – просте. Тоді $(ac+bd)|(ab+cd) \Rightarrow (ac+bd)|(ab+cd)+(ac+bd) = (a+d)(b+c) \Rightarrow (ac+bd)|(a+d)$ або $(ac+bd)|(b+c)$, але зрозуміло, що тут дільник більший від кожного із наведених кратних, тому це неможливо.

Лема доведена.

Таким чином, доведено, що $T(ac+bd) \geq 2$. Оскільки $(ac+bd)|(ab+cd)$, то $T(ab+cd) \geq T(ac+bd) \geq 2$, тобто $T(ab+cd) = T(ac+bd) = 2$, але тоді ці числа повинні збігатися, бо вони можуть мати вигляд або квадрата простого числа, або добутку двох простих чисел. Таким чином, $(ac+bd) = (ab+cd) \Rightarrow (a-d)(b-c) = 0$, що суперечить тому, що усі числа є попарно різними.

Одержана суперечність завершує доведення.

4. (Безверхнєв Ярослав) Через точку F, що розташована поза колом k, провели до цього кола дотичну FA та січну FB, яка перетинає k в точках B і C (C лежить між F і B). Через точку C провели дотичну до кола k, яка перетнула відрізок FA в точці E. Відрізок FX – бісектриса трикутника AFC. Виявилось, що точки E, X та B лежать на одній прямій. Доведіть, що добуток довжин двох сторін трикутника ABC дорівнює квадрату довжини третьої сторони.

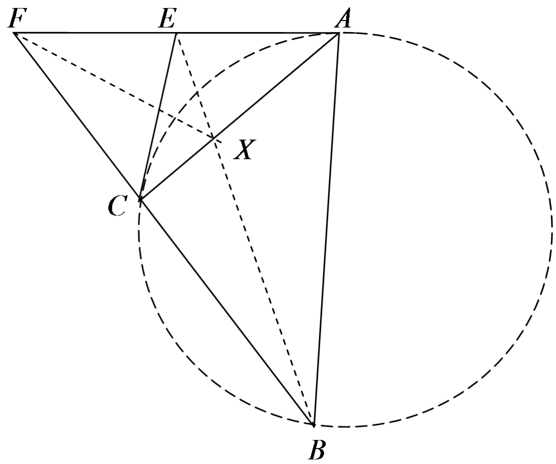

Рис. 9

Розв'язання. Нижче доведемо, що відрізок BX – це симедіана $\triangle ABC$, за відомою властивістю симедіани, яка також буде доведена нижче, $\frac{CX}{AX} = \frac{CB^2}{AB^2}$, з властивості бісектриси FX маємо, що $\frac{CX}{AX} = \frac{FC}{FA}$ (рис.9).

Оскільки $\triangle AFC \sim \triangle BFA$ за рівними кутами $\angle CAF = \angle FBA$ та спільним кутом $\angle CFA$, тому $\frac{FC}{AF} = \frac{AC}{AB}$. Тепер використаємо усі ці одержані рівності.

$$\frac{AC}{AB} = \frac{FC}{AF} = \frac{CX}{AX} = \frac{CB^2}{AB^2},$$

звідки й маємо шукане співвідношення:

$$AB \cdot AC = CB^2.$$

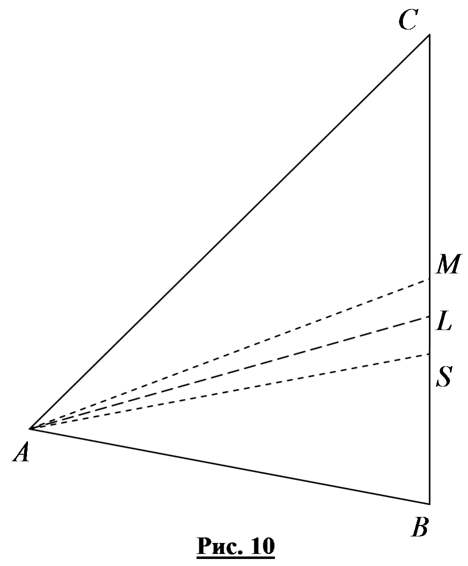

Рис. 10

Симедіана – чевіана у трикутнику, відмінна від медіани, така що кут між симедіаною та бісектрисою рівний куту між бісектрисою та медіаною, що проведені з тієї ж вершини.

Доведемо наведені твердження про симедіану.

1) Нехай, як на рис.10, $AS = s$ – симедіана, $AL = l$ – бісектриса, $AM = m$ – медіана $\triangle ABC$, тоді $\angle MAL = \angle LAS$.

Розглянемо відношення площ трикутників ASC та AMB:

$$\frac{S_{AMB}}{S_{ASC}} = \frac{\frac{1}{2}mc\sin\angle BAM}{\frac{1}{2}sb\sin\angle SAC} = \frac{cm}{bs},$$

оскільки кути $\angle BAM$ та $\angle SAC$ рівні (рис.10).

Розглянемо аналогічно площі $\triangle ASB$ та $\triangle AMC$ і одержимо, що:

$$\frac{S_{AMC}}{S_{ABS}} = \frac{bm}{cs}.$$

Оскільки $S_{AMB} = S_{AMC}$, бо AM – медіана, розділимо два одержаних відношення і будемо мати, що

$$\frac{S_{ABS}}{S_{ASC}} = \frac{c^2}{b^2} = \frac{BS}{SC},$$

що й треба було довести.

2) Якщо до кола проведені із зовнішньої точки F дві дотичні FA та FC (рис.11), по інший бік від прямої AC відносно точки F на колі вибрана точка B, тоді на прямій BF лежить симедіана $\triangle ABC$.

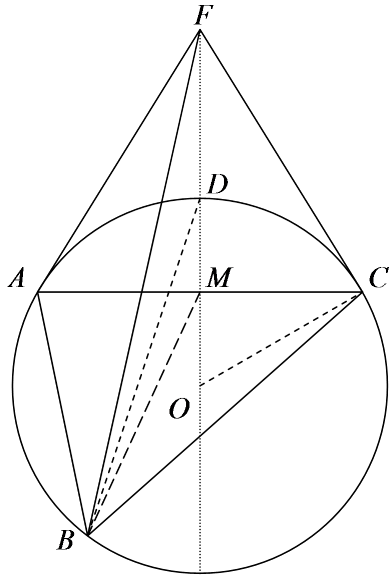

Рис. 11

З'єднаємо центр кола O та точку дотику C, тоді з прямокутного $\triangle FOC$ маємо рівність $OM \cdot OF = OC^2 = R^2 = OB^2$. Звідси маємо рівність:

$$\frac{OM}{OB} = \frac{OB}{OF}.$$

Тепер розглянемо трикутники BOM та FOB. Вони мають спільний кут та прилеглі пропорційні сторони, тому $\triangle BOM \sim \triangle BOF$. Позначимо

$$k = \frac{OM}{OB} = \frac{OB}{OF} = \frac{BM}{BF},$$

тоді $OB = kOF$, $OM = kOB = k^2OF$, звідки (рис.11)

$$\frac{DM}{DF} = \frac{BO - OM}{OF - OB} = \frac{kOF - k^2OF}{OF - kOF} = k = \frac{BM}{BF},$$

що й доводить з властивості бісектриси, що BD – бісектриса $\angle FBM$. Тому кут між BF та бісектрисою BD рівний куту між бісектрисою BD та медіаною BM, що й визначає симедіану.

Альтернативне розв'язання. Розглянемо трикутнник ACF. Точки E, X, B лежать на одній прямій, тому за теоремою Менелая

$$\frac{AE}{EF} \cdot \frac{FB}{BC} \cdot \frac{CX}{XA} = 1. \qquad (1)$$

Оскільки FX – бісектриса кута AFC, то $\frac{CX}{XA} = \frac{CF}{FA}$. $EA = EC$, як дотичні, проведені до кола з однієї точки, а $BF = \frac{AF^2}{FC}$ з теореми про квадрат дотичної, тому (1) можемо переписати у вигляді

$$\frac{EC}{EF} \cdot \frac{AF}{BC} = 1. \qquad (2)$$

Оскільки $\angle ECA = \angle CBA$, то $\angle FCE = \pi - \angle ECA - \angle ACB = \pi - \angle CBA - \angle ACB = \angle CAB$, і за теоремою синусів для трикутника CEF отримуємо

$$\frac{EC}{\sin\angle AFB} = \frac{EF}{\sin\angle FCE} = \frac{EF}{\sin\angle CAB}, \qquad (3)$$

з іншого боку, за теоремою синусів для трикутника AFB

$$\frac{AF}{\sin\angle FBA} = \frac{AB}{\sin\angle AFB}. \qquad (4)$$

Використаємо (2), (3) і (4) разом, і, скориставшись теоремою синусів для трикутника ABC, отримуємо, що
$$\frac{AB}{BC}=\frac{EF\sin\angle AFB}{EC\sin\angle FBA}=\frac{\sin\angle CAB}{\sin\angle CBA}=\frac{BC}{AC},$$
звідки випливає, що сторони трикутника ABC утворюють геометричну прогресію.

11 клас

1. (Ясінський В'ячеслав) Розв'язати рівняння:

$$\cos\pi x=\left[\frac{x}{2}-\left[\frac{x}{2}\right]-\frac{1}{2}\right].$$

Тут через $[a]$ позначено цілу частину числа a, тобто найбільше ціле число, яке не перевищує a.

Відповідь: $x=\frac{3}{2}+2n$, де $n\in\mathbb{Z}$.

Розв'язання. Скористаємося формулою для дробової частини числа: $\{a\}=a-[a]$. Дістанемо:

$$\cos\pi x=\left[\left\{\frac{x}{2}\right\}-\frac{1}{2}\right].$$

Оскільки, за основною властивістю дробової частини, для будь-якого дійсного x виконується подвійна нерівність $0\le\left\{\frac{x}{2}\right\}<1$, то розглянемо такі два випадки.

1) Нехай $0\le\left\{\frac{x}{2}\right\}<\frac{1}{2}$, тоді $-\frac{1}{2}\le\left\{\frac{x}{2}\right\}-\frac{1}{2}<0$, тобто $\left[\left\{\frac{x}{2}\right\}-\frac{1}{2}\right]=-1$. Тому у цьому випадку $\cos\pi x=-1$. Звідки знаходимо, що $x=1+2k$, $k\in\mathbb{Z}$. При таких значеннях x маємо: $\left\{\frac{x}{2}\right\}=\left\{\frac{1}{2}+k\right\}=\frac{1}{2}$, що суперечить припущенню. Отже, в цьому випадку дане рівняння розв'язків немає.

2) Нехай $\frac{1}{2}\le\left\{\frac{x}{2}\right\}<1$, тоді $0\le\left\{\frac{x}{2}\right\}-\frac{1}{2}<\frac{1}{2}$, тобто $\left[\left\{\frac{x}{2}\right\}-\frac{1}{2}\right]=0$. Тому у цьому випадку $\cos\pi x=0$. Звідки знаходимо, що $x=\frac{1}{2}+k$, $k\in\mathbb{Z}$. При таких значеннях x маємо:

$$\left\{\frac{x}{2}\right\}=\left\{\frac{1}{4}+\frac{k}{2}\right\}=\begin{cases}\frac{1}{4}, k=2n,\\ \frac{3}{4}, k=2n+1.\end{cases}$$

Для випадку, що розглядається, підходить $k=1+2n$, де $n\in\mathbb{Z}$. Тому, $x=\frac{3}{2}+2n$, де $n\in\mathbb{Z}$, – це усі розв'язки даного рівняння.

2. (Задача № 2 за 10-й клас)

3. (Веклич Богдан) Натуральні числа a,b,c,d задовольняють умову:

$$0<|ad-bc|<\min\{c,d\}.$$

x,y – взаємно прості натуральні числа, більші від 1. Доведіть, що число x^a+y^b не ділиться на число x^c+y^d.

Розв'язання. Доведемо методом від супротивного, позначимо через s суму x^c+y^d. Припустимо, що $(x^a+y^b)\,\vdots\, s$, тоді $x^a\equiv -y^b \pmod{s}$, крім того, за побудовою $x^c\equiv -y^d \pmod{s}$. Звідси випливає, що $x^{ad}\equiv(-1)^d y^{bd} \pmod{s}$ та $x^{bc}\equiv(-1)^b y^{bd} \pmod{s}$, тому $(-1)^d x^{ad}\equiv y^{bd}\equiv(-1)^b x^{bc} \pmod{s}\Rightarrow x^{ad}\equiv(-1)^{b-d}x^{bc} \pmod{s}$. Очевидно, що x взаємно просте з s, тому скоротимо останню конгруенцію на x в степені $\min\{ad,bc\}$ і одержимо, що $x^{|ad-bc|}\equiv(-1)^{b-d} \pmod{s}$. Повністю аналогічно одержимо, що $y^{|ad-bc|}\equiv(-1)^{a-c} \pmod{s}$. Тому $y^{|ad-bc|}-x^{|ad-bc|}\,\vdots\, s$ або $y^{|ad-bc|}+x^{|ad-bc|}\,\vdots\, s$.

З умов задачі ми маємо, що $0<|ad-bc|<\min\{c,d\}$. Але тоді ми маємо, що

$$\left|y^{|ad-bc|}-x^{|ad-bc|}\right|<y^{|ad-bc|}+x^{|ad-bc|}<y^d+x^c=s.$$

Але тоді сума чи різниця $\left|y^{|ad-bc|} \pm x^{|ad-bc|}\right|$ може ділитись на s лише у випадку, якщо це різниця і вона дорівнює нулю. Але це суперечить умові взаємної простоти x та y.

Твердження доведене.

4. (Ясінський В'ячеслав) Дано трапецію $ABCD$ з основами AD і BC. На бічній стороні CD довільно відмітили точку F, E – точка перетину прямих AF і BD. На бічній стороні AB відмітили точку G так, що $EG \parallel AD$. Позначимо через H точку перетину прямих CG і BD, через I – точку перетину прямих FH і AB. Доведіть, що прямі CI, FG і AD перетинаються в одній точці.

Розв'язання. Не порушуючи загальності, будемо вважати, що $BC < AD$. Нехай S – точка перетину прямих AB і CD, а T – точка перетину прямих AF і DG. Спочатку доведемо, що точки S, H, T – колінеарні. Для цього застосуємо теорему Менелая для трикутника ABE і трьох точок S, H, T, які лежать на прямих, що містять його сторони: точки S, H, T, будуть колінеарними тоді і тільки тоді, коли

$$\frac{AT}{TE} \cdot \frac{EH}{HB} \cdot \frac{BS}{SA} = 1.$$

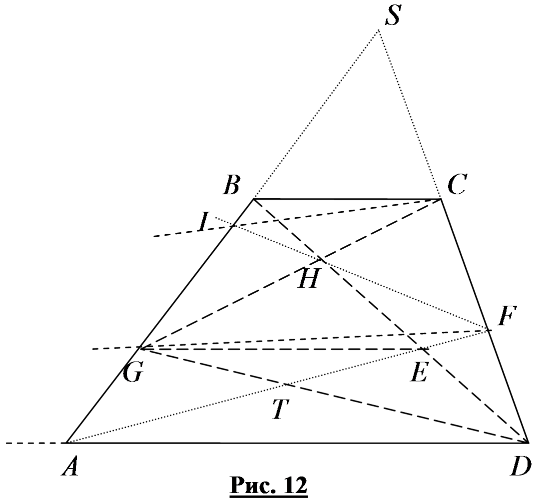

Рис. 12

Оскільки $EG \parallel AD$, $GE \parallel BC$ та $AD \parallel BC$,

то $\triangle ATD \sim \triangle ETG$, $\triangle GHE \sim \triangle CHB$ та $\triangle ASD \sim \triangle BSC$. Звідки випливає, що

$$\frac{AT}{TE} = \frac{AD}{GE}, \qquad \frac{EH}{BH} = \frac{GE}{BC}, \qquad \frac{BS}{SA} = \frac{BC}{AD}.$$

Отже,

$$\frac{AT}{TE} \cdot \frac{EH}{HB} \cdot \frac{BS}{SA} = \frac{AD}{GE} \cdot \frac{GE}{BC} \cdot \frac{BC}{AD} = 1,$$

що і доводить колінеарність точок S, H, T.

Далі, розглянемо два трикутники AFI і DGC. Їхні відповідні сторони перетинаються в точках $IF \cap CG = H$, $FA \cap GD = T$, $AI \cap CD = S$, які колінеарні. Тому, за теоремою Дезарга, прямі CI, FG і AD, що проходять через відповідні вершини цих трикутників, перетинаються в одній точці.