

## Математичний бій 1, молодша ліга, група В

1. Чи можуть числа  $p$  і  $p^6 + 6$  одночасно виявитися простими?
2. У чотирикутнику  $ABCD$   $\angle DAB = 90^\circ$ ,  $\angle ABC = \angle BCD = 60^\circ$ ,  $AB = 5$ ,  $CD = 4$ . Знайдіть  $BC$ .
3. Чи існує таке десятизначне составне число, в записі якого кожна з цифр  $0, 1, 2, \dots, 9$  зустрічається рівно один раз і яке залишається составним після викреслювання будь якої його цифри?
4. У країні є декілька міст, деякі з яких з'єднані дорогами (дороги перетинаються лише у містах). У кожному місті встановлена табличка, на якій написане число, що дорівнює довжині найменшого путі, що починається у цьому місті і проходить через усі міста (через деякі міста цей путь може проходити двічі). Доведіть, що не існує двох міст, для яких відношення чисел на табличках більше за  $1,5$ .
5. Числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  задовольняють рівність  $\max(a, b) + \max(c, 2011) = \min(a, c) + \min(b, 2012)$ . Доведіть, що  $b \geq c$ .
6. По колу розташовані декілька чисел, сума яких додатня. Серед усіх сум чисел, що стоять підряд, обрали найбільшу  $S$  й найменшу  $s$ . Доведіть, що  $S + s > 0$ .
7. Тимур написав на дошці натуральне число. Щохвилини він домножає його на 3, закреслює після цього його довільну цифру, крім першої (якщо це можливо), і витирає старе. Доведіть, що рано чи пізно на дошці з'явиться число 1.
8. Чи можна розрізати квадрат  $5 \times 5$  на 7 триклітинкових кутків та один квадрат  $2 \times 2$ .
9. На стороні  $BC$  гострокутного трикутника  $ABC$  побудован квадрат  $BCDE$  вершинами назовні.  $AN$  – висота трикутника  $ABC$ , точка  $M$  на промені  $AN$  така, що  $AM = BC$ . Через точку  $B$  провели пряму  $l \perp DM$ , а через точку  $C$  – пряму  $s \perp EM$ . Доведіть, що прямі  $l$  та  $s$  перетинаються на прямій  $AN$ .
10.  $n$  – натуральне число більше за 1. Доведіть, що можна обрати  $n$  послідовних натуральних чисел, добуток яких ділиться на довільне просте число, що не перевищує  $2n + 1$ , но не ділиться на довільне інше просте число.