

## Теорія чисел–3

1. Знайдіть остачі від ділення чисел: а)  $3^{333}$  на 7; б)  $2012^{2012}$  на 17;  $5^{55}$  на 11.
2. Доведіть, що  $49^{100} - 14^{50} : 5$ .
3. Знайдіть останню цифру числа а)  $3^{2012}$ ; б)  $9^{2012}$ ; в)  $6^{2012}$ ; г)  $2^{2012}$ .
4. Знайдіть останню цифру числа  $1^2 + 2^2 + \dots + 99^2$ .
5. Доведіть, що  $n^5 + 4n : 5$  для будь-якого  $n \in \mathbb{N}$ .
6. Доведіть, що  $n^3 + 2$  не ділиться на 9 ні при яких  $n \in \mathbb{N}$ .
7. Відомо, що  $x^2 + y^2 : 7$  для деяких цілих чисел  $x$  і  $y$ . Доведіть, що тоді  $xy : 49$ .
8. Знайдіть дві останні цифри числа  $1^3 + 2^3 + \dots + 99^3$ .
9. Про сім чисел відомо, що сума будь-яких шести з них ділиться на 5. Доведіть, що кожне з чисел ділиться на 5.
10. Яке найбільше число ви зможете записати за допомогою чотирьох четвірок?