Відбір міста Києва на Всеукраїнську олімпіаду

I тур

Умови та розв'язки по усіх класах

8 клас

1. Знайти усі раціональні r та цілі k, які задовольняють рівняння:

$$r(5k - 7r) = 3.$$

Відповідь: $(k = 2, r = 1)$; $(k = 2, r = \frac{3}{7})$; $(k = -2, r = -1)$; $(k = -2, r = -\frac{3}{7})$.

Розв'язання. Очевидно, що $r \neq 0$, позначимо $r = \frac{m}{n}$ – нескоротний дріб, $n > 0$. Підставимо цей дріб у задане рівняння і будемо мати, що $\frac{m}{n}\left(5k - 7\frac{m}{n}\right) = 3$, або це рівносильне рівності $m(5kn - 7m) = 3n^2$. Звідси випливає, що $3n^2 \vdots m$, але оскільки m, n – взаємно прості числа, то $3 \vdots m$, тому можливі 4 випадки.

1) $m = 1 \Rightarrow 5kn - 7 = 3n^2$ або $n(5k - 3n) = 7$, звідки випливає, що $n = 1$ або $n = 7$. При $n = 1$ ми одержуємо, що $k = 2, r = 1$, при $n = 7$ маємо рівняння $5k = 22$, яке цілих розв'язків немає.

2) $m = 3 \Rightarrow n(5k - n) = 21$, із взаємної простоти m, n маємо, що $n = 1$ або $n = 7$. Цей випадок має розв'язання лише у другому випадку і цей розв'язок є $k = 2, r = \frac{3}{7}$.

3) $m = -1 \Rightarrow n(5k + 3n) = -7$, знову маємо, що $n = 1$ або $n = 7$. Тут розв'язок існує лише при $n = 1 \Rightarrow k = -2, r = -1$.

4) $m = -3 \Rightarrow n(5k + n) = -21$, звідси знаходимо останній розв'язок $k = -2, r = -\frac{3}{7}$.

2. Чи можна на прямій відмітити n синіх та n жовтих точок таким чином, щоб сума попарних відстаней між однокольоровими точками була більшою від суми відстаней між різнокольоровими точками?

Відповідь: Не можна.

Розв'язання. Доведемо, що сумарна відстань між різнокольоровими точками завжди більша. Назвемо однокольоровим відрізком такий, що має однокольорові кінці, і різнокольоровим - у якого кінці різного кольору. Покажемо, що якщо взяти будь-які дві сусідні точки, то серед відрізків, що його покривають, кількість різнокольорових відрізків більша від кількості однокольорових відрізків.

Дійсно, нехай AB – сусідні точки (A лівіша від B), тоді зліва від A включно з самою точкою A розташовано k_1 синя та m_1 жовта точки, відповідно праворуч від B включно з самою точкою B розташовано k_2 синя та m_2 жовта точки, $n = k_1 + k_2 = m_1 + m_2$. Підрахуємо кількість різних типів відрізків, що покривають AB. Однокольорових буде $O = k_1k_2 + m_1m_2$, а різнокольорових – $R = k_1m_2 + m_1k_2$. Тоді $R - O = k_1(m_2 - k_2) + m_1(k_2 - m_2) = (k_1 - m_1)(m_2 - k_2) \geq 0$, оскільки очевидно, що дужки мають однакові знаки. Зауважимо також, що для деяких відрізків очевидно, що знак буде строго більше, коли не виконується рівність $k_1 = m_1$, наприклад для відрізків, у яких непарна кількість точок зліва та справа. Таким чином сумарна довжина різнокольорових відрізків завжди більша.

3. Нехай $ABCD$ опуклий чотирикутник вписаний у коло з центром у точці O та радіусом R (через (O, R) тут і в подальшому будемо позначати коло з центром у точці O та радіусf R). Розглянемо чотири кола $\gamma_A = (A, R), \gamma_B = (B, R), \gamma_C = (C, R), \gamma_D = (D, R)$, і позначимо таким чином їх точки перетину відмінні від точки O: $K \in \gamma_A \cap \gamma_B, L \in \gamma_B \cap \gamma_C, M \in \gamma_C \cap \gamma_D, N \in \gamma_D \cap \gamma_A$. Довести, що $KLMN$ – паралелограм.

Розв'язання. З властивостей перетину двох однакових кіл, маємо, що відрізки $AK = OB$ та $AK \parallel OB$, тому $AKBO$ – ромб (рис.1). Аналогічно ромбами є чотирикутники $BOCL$, $DOCM$ та $DOAN$. Тому $KACL$ та $NACM$ паралелограми, звідки випливає що $KL = AC = MN$ та $KL \parallel AC \parallel MN$, тобто $KLMN$ також паралелограм, що й треба було довести.

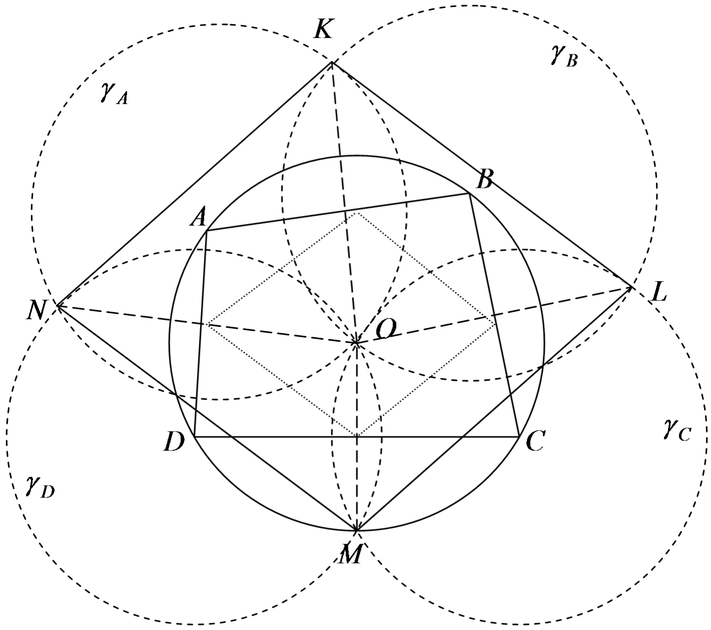

Рис.1

4. Відомо, що існує таке число S, для якого виконується умова: якщо для чотирьох чисел a, b, c, d, відмінних від 0 та 1 виконуються рівності

$$S = a+b+c+d = \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d},$$

то має місце і наступна рівність:

$$S = \frac{1}{a-1}+\frac{1}{b-1}+\frac{1}{c-1}+\frac{1}{d-1}.$$

Знайдіть усі можливі значення S.

Відповідь: $S = -2$.

Розв'язання. Зрозуміло, що якщо числа a, b, c, d задовольняють умову задачі, то числа $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d}$ також задовольняють умови. Таким чином також повинна виконуватись така рівність:

$$S = \frac{1}{\frac{1}{a}-1}+\frac{1}{\frac{1}{b}-1}+\frac{1}{\frac{1}{c}-1}+\frac{1}{\frac{1}{d}-1}.$$

Додамо останні дві рівності, з урахуванням співвідношення $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{\frac{1}{x}-1} = \frac{1}{x-1}+\frac{x}{1-x} = \frac{1-x}{x-1} = -1$, маємо, що $2S = -4$, або $S = -2$, що й треба було знайти.

Зауваження. Неважко переконатись, що якщо $a+b+c+d = \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d} = -2$, то й обов'язково $\frac{1}{a-1}+\frac{1}{b-1}+\frac{1}{c-1}+\frac{1}{d-1} = -2$, але цього в задачі не вимагається.

9 клас

1. Знайти усі такі натуральні n, для яких $(8^n + n)$ ділиться на $(2^n + n)$.

Відповідь: $n = 1, 2, 4, 6$.

Розв'язання. Зробимо такі перетворення: , $8^n+n = (2^n+n)\left((2^n)^2 - n\cdot 2^n + n^2\right) - (n^3-n)$ оскільки вираз $\left((2^n)^2 - n\cdot 2^n + n^2\right)$ - натуральний, то умова задачі рівносильна тому, що $(n^3 - n)$ ділиться на $(2^n + n)$.

При $n = 1$ $N^3 - n = 0$ і умова виконується.

При $n > 1$ повинна виконуватись нерівність: $(n^3 - n) \geq (2^n + n) \Rightarrow n^3 \geq 2^n$. ММІ легко показати, що остання нерівність не виконується при $n \geq 10$, а тому залишається перевірити ті значення, що залишились. Перевіркою переконуємось, що умова виконується при $n = 2, 3, 6$.

2. Задача 8.2

3. Задача 8.3

4. Знайти найбільше можливе значення λ таке, що для довільних додатних чисел u, v, w, які задовольняють умову $u\sqrt{vw} + v\sqrt{uw} + w\sqrt{uv} \geq 1$, виконується нерівність:
$$u + v + w \geq \lambda.$$

<u>Відповідь:</u> $\lambda = \sqrt{3}$.

<u>Розв'язання.</u> Скористаємось нерівностями між середніми та нерівністю Коші-Буняковського :
$$\frac{(u+v+w)^4}{9} = \left(\frac{u+v+w}{3}\right)^3 \cdot 3(u+v+w) \geq 3uvw(u+v+w) =$$
$$= (uvw + uvw + uvw)(u+v+w) \geq (u\sqrt{vw} + v\sqrt{uw} + w\sqrt{uv})^2 \geq 1.$$
Таким чином $u + v + w \geq \sqrt{3}$, рівність досягається при умові $u = v = w = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

<u>10 клас</u>

1. Задача 9.1

2. Хокейний турнір у якому прийняли участь більше ніж 5 команд, проводився у одне коло, тобто кожна команда зіграла з іншою рівно 1 раз. Виявилось, що усі команди набрали різну кількість очок, команда, що стала останньою виграла не менше 25% відсотків своїх матчів, а команда, що посіла друге місце - виграла не більше 40% своїх матчів. Яка найбільша кількість команд могла приймати участь у цьому турнірі? (У хокеї за перемогу дається 2 очки, за нічию – 1 очко, за поразку – 0 очок).

<u>Відповідь:</u> 9 команд.

<u>Розв'язання.</u> Нехай у турнірі приймало участь n команд, тоді кожна зіграла $n-1$ матч. Команда, що стала останньою виграла не менше 25% зустрічей, тому набрала не менше, ніж $\frac{n-1}{4} \cdot 2 = \frac{n-1}{2}$ очок. Тому, передостання команда набрала щонайменше $\frac{n-1}{2} + 1$, третя з кінця – не менше, ніж $\frac{n-1}{2} + 2$ і так далі. Переможець набрав щонайменше $\frac{n-1}{2} + n - 1$. Таким чином усі разом команди набрали очок не менше, ніж
$$\frac{n-1}{2} + \frac{n-1}{2} + 1 + \frac{n-1}{2} + 2 \ldots + \frac{n-1}{2} + n - 1 = n(n-1).$$
Але й усього очок було у турнірі розіграно рівно $n(n-1)$. Тому в усіх цих нерівностях щодо набраних очок слова "не менше" треба замінити на рівності, тобто на слова "рівно".

Таким чином остання команда виграла рівно $\frac{n-1}{4}$ матчів. Таким чином число $n-1$ кратне 4. Тепер розглянемо оцінку для другої команди, про яку відомо, що вона виграла не більше ніж 40% матчів та набрала $\frac{n-1}{2} + n - 2$ очок. Тоді маємо таку нерівність:
$$\frac{n-1}{2} + n - 2 \leq \frac{4}{10}(n-1) \cdot 2\frac{6}{10}(n-1),$$
звідки знаходимо, що $n \leq 11$. З умов, що n кратне 4 та більше 5 єдина можливість – $n = 9$.

Залишається показати, що подібний турнір за участю 9 команд міг відбутися. Це показує останній приклад.

Місце	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Очки
1	XX	1	2	1	1	1	2	2	2	12
2	1	XX	1	1	1	1	2	2	2	11
3	0	1	XX	1	1	1	2	2	2	10
4	1	1	1	XX	1	1	0	2	2	9
5	1	1	1	1	XX	1	0	1	2	8
6	1	1	1	1	1	XX	0	0	2	7
7	0	0	0	2	2	2	XX	0	0	6
8	0	0	0	0	1	2	2	XX	0	5
9	0	0	0	0	0	0	2	2	XX	4

3. Нехай O – центр описаного кола трикутника ABC, точки A_1, B_1, C_1 – середини відповідних сторін, точки A_2, B_2, C_2 визначаються умовами $\overrightarrow{OA_2} = \lambda \cdot \overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OB_2} = \lambda \cdot \overrightarrow{OB_1}, \overrightarrow{OC_2} = \lambda \cdot \overrightarrow{OC_1}$, при $\lambda > 0$. Довести, що прямі AA_2, BB_2, CC_2 перетинаються в одній точці.

   Розв'язання. Побудуємо H – ортоцентр $\triangle ABC$ (рис.2). Тоді відомо, що $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OA_1}$. Нехай прямі AA_2 та OH перетинаються у точці G, з подібності $\triangle AGH \sim \triangle GOA_2$ ми маємо, що $\overrightarrow{HG} = \frac{2}{\lambda}\overrightarrow{GO}$, таким чином AA_2 перетинає відрізок OH у точці, що поділяє його у фіксованому відношенні $\frac{2}{\lambda}$, тому через цю точку проходять і усі інші відрізки BB_2 та CC_2.

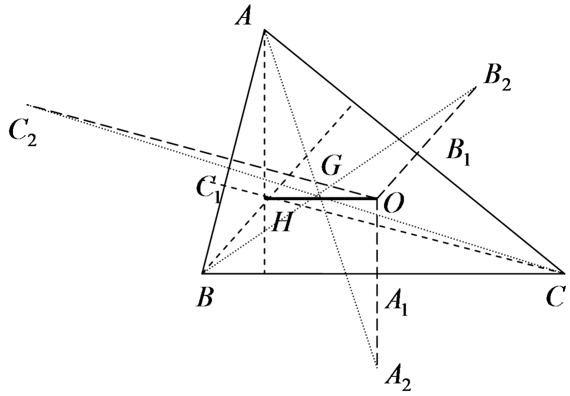

Рис.2

4. Задача 9.4

11 клас

1. Нехай M – нескінченна множина раціональних чисел таких, що добуток будь-яких 2009 з них (попарно різних) є цілим числом, яке не ділиться на 2009-ий степінь простого числа. Довести, що усі числа множини M – цілі.

   Розв'язання. Виберемо деякі 2008 чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{2008} \in M$, при цьому $a_1 a_2 \ldots a_{2008} = \frac{p}{q}$, де $(p, q) = 1$. Звідси одержимо, що множина M містить нескінченну кількість раціональних чисел $\alpha_i = \frac{p_i}{q_i}$, таких що $(p_i, q_i) = 1$ та $\alpha_i \cdot \frac{p}{q}$ – ціле, тобто $q_i | p$, тобто нескінченно багато з чисел q_i рівні між собою. Тому добуток таких 2009 чисел не є цілим. Звідси випливає, що множина M містить нескінченну кількість цілих чисел.

   Нехай $\frac{a}{b} \in M$, $(a, b) = 1$, $b > 1$. Якщо p – простий дільник числа b, тоді у множині M є нескінченна кількість цілих чисел, які кратні p. Тоді можна взяти 2009 таких чисел і вийде, що їх добуток буде ділитись на p^{2009}, що суперечить умові. Одержана суперечність завершує доведення того, що усі числа множини M є цілими.

2. Задача 10.2

3. Задача 10.3

4. Знайти усі трійки дійсних чисел (x, y, z), кожне з яких більше 3, які задовольняють рівність:
$$\frac{(x+2)^2}{y+z-2} + \frac{(y+4)^2}{z+x-4} + \frac{(z+6)^2}{x+y-6} = 36.$$

   Відповідь: $(x, y, z) = (10, 8, 6)$.

   Розв'язання. З умов задачі випливає, що усі знаменники додані. З нерівності Коші-Буняковського
$$\left(\frac{(x+2)^2}{y+z-2} + \frac{(y+4)^2}{z+x-4} + \frac{(z+6)^2}{x+y-6}\right)((y+z-2)+(x+z-4)+(x+y-6)) \geq$$
$$\geq (x+y+z+12)^2 \Leftrightarrow$$
$$\frac{(x+2)^2}{y+z-2} + \frac{(y+4)^2}{z+x-4} + \frac{(z+6)^2}{x+y-6} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{(x+y+z+12)^2}{x+y+z-6}.$$

Із заданої в умові рівності маємо, що $\frac{(x+y+z+12)^2}{x+y+z-6} \leq 72$.

Позначимо $t = x+y+z+12 > 21$ остання нерівність набуває такого вигляду: $t^2 \leq 72(t-18)$ $\Leftrightarrow t^2 - 72t + 1296 \leq 0 \Leftrightarrow (t-36)^2 \leq 0$. Таким чином тут можлива лише рівність $t = 36$ $\Leftrightarrow x + y + z = 24$. Крім того рівність можлива лише при умові $\frac{(x+y+z+12)^2}{x+y+z-6} = 72$, а остання нерівність можлива, коли у нерівності Коші-Буняковського виконується рівність, а це відбувається, коли відповідні доданки пропорційні, тобто $\frac{x+2}{y+z-2} = \frac{y+4}{x+z-4} = \frac{z+6}{y+x-6} = a$. Далі шляхом перетворень можна одержати, що $\begin{cases} a(y+z) - x = 2(a+1), \\ a(x+z) - y = 4(a+1), \\ a(y+x) - x = 6(a+1), \end{cases} \Rightarrow (2a-1)(x+y+z) = 12(a+1) \Rightarrow a = 1 \Rightarrow (x,y,z) = (10,8,6)$.