Комплексні числа–1

Нагадаємо, що комлексна площина — це звичайна площина, на якій кожній точці (a, b) поставлено у відповідність компдлексне число $a + ib$.

1. Представте дані числа у тригонометричній формі: а) $1+i$, б) $2+\sqrt{3}+i$, в) $1 + \cos\varphi + i\sin\varphi$.

2. Чи правда, що $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$?

3. Зобразіть на комлексній площині множини, які описуються такими умовами

   а) $\left|\frac{z-1}{z+1}\right| < 1$, б) $|iz + 1| = 3$, в) $\mathrm{Re}(z^2) \leqslant 1$, г) $|z - i| + |z + i| = 2$.

4. Доведіть, що для будь-яких комплексних чисел z_1 і z_2 виконується рівність
$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$
   Подумайте над геометричним змістом цієї рівності.

5. Порахуйте

   а) $(1 + i)^{17}$, б) $(2 - 2\sqrt{3}i)^{111}$, в) $(1 - \sqrt{3}i)^{145} + (1 - \sqrt{3}i)^{145}$, г) i^{2013}.

6. Нехай $k \neq 1$ — деяке фіксоване додатне число. Знайдіть ГМТ, що на комплексній площині описується рівнянням $|z - a| = k|z - b|$, де a, b — деякі фіксовані точки. Подумайте над геометричним змістом.

7. Доведіть, що для будь-яких дійсних чисел a_i, b_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ виконується нерівність
$$\sqrt{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 + (b_1 + b_2 + \cdots + b_n)^2} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2} + \cdots + \sqrt{a_n^2 + b_n^2}.$$