

Діофантові рівняння-2

Найчудовіше число — 73. Ви хочете знати чому?

– Ні, і думки не було!

– 73 — це двадцять перше просте число, його дзеркальне відображення є дванадцятим, чиє дзеркальне відображення є результатом добутку — не впадів — семи і трьох. Ну, непогано, а?

д-р. Шелдон Купер

1. Довести, що загальним розв'язком рівняння $ax + by = c$, де $(a, b) = 1$, є $(x, y) = (x_0 - bt, y_0 + at)$, де $t \in \mathbb{Z}$, а (x_0, y_0) — довільний розв'язок рівняння $ax + by = c$. Розв'язати рівняння (якщо не сказано інше):
2. $17x - 13y = -9$ в \mathbb{Z} .
3. $x + 3y = 29$ в \mathbb{Z} .
4. $19x - 10y = 1$ в \mathbb{Z} .
5. $x^2 = y^2 + 2y + 13$ в \mathbb{Z} .
6. $n^2 - 10n + 21 = p$, $n \in \mathbb{N}$, p — просте.
7. $x^2(y - 1) + y^2(x - 1) = 1$ в \mathbb{Z} .
8. p, q — задані прості числа. Розв'язати в \mathbb{N} : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{pq}$.
9. $x^2 + 6xy + 8y^2 + 3x + 6y = 2$ в \mathbb{Z} .
10. $x^3 - y^3 = xy + 61$ в \mathbb{N} .
11. $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2x(z - 1) + 2y(z + 1) = w^2$ в \mathbb{N} .
12. $x^3 + (x + 1)^3 + \dots + (x + 7)^3 = y^3$ в \mathbb{Z} .
13. $(x + 2)^4 - x^4 = y^3$ в \mathbb{N} .
14. При яких $a \in \mathbb{N}$ існують $x, y \in \mathbb{N}$ такі, що $x^2 + y^2 = axy$?
15. $p > 3$ — задане просте число. Розв'язати в \mathbb{N} : $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = p$.

Намагайтеся:

- розкласти на множники
- виділити повні квадрати
- розглянути дискримінант
- затиснути вираз повними квадратами послідовних чисел
- зробити заміну
- думати