Відбір міста Києва на Всеукраїнську олімпіаду 2010-2011 рр

III тур

Умови та розв'язки по усіх класах

8 клас

1. Нехай $n = (p^2+2)^2-9(p^2-7)$ – натуральне число, де p – просте число. Яку найменшу суму цифр може мати число n, і для яких простих p вона досягається?

Відповідь: $n = 103$ та $p = 3$.

Розв'язання. При $p = 2$ та $p = 3$ маємо, що $n = 63$ та $n = 103$ відповідно. Для усіх інших n можемо записати, що

$$n = (p^2+2)^2-9(p^2-7) = p^4-5p^2+4+63 = (p^2-4)(p^2-1)+63 = (p-2)(p-1)(p+1)(p+2)+63.$$

При $p \neq 3$ кожний з виразів $(p-1)(p-2)$ та $(p+1)(p+2)$ кратний 3, тому n кратне 9, звідси найменша можлива сума цифр буде 9. Таким чином шукані значення $n = 103$ та $p = 3$.

2. Через точку L – середину сторони BC трикутника ABC, у якого $AC < AB$, провели пряму l, що паралельна бісектрисі AV кута BAC. Пряма l перетинає прямі AB та AC у точках X та Y відповідно. На промені XY відмічено точку Z, для якої справджується рівність $XY = YZ$. Прямі BY та CZ перетинаються в точці D. Доведіть, що бісектриса $\angle BDC$ паралельна прямій l.

Розв'язання. Відмітимо на промені AY точку E, для якої $AE = AB$. Тоді $BE \parallel l$ оскільки $\angle ABE = \frac{1}{2}(\pi - \angle BAE) = \angle BAV$. Тоді відрізок LY середня лінія $\triangle BEC$, бо вона проходить через середину сторони та паралельно основі. Тому Y – середина відрізку CE. Таким чином у чотирикутнику $XEZC$ діагоналі в точці перетину діляться навпіл, тому він паралелограм, звідси $EX \parallel CZ$. Нехай $BY \cap EX = T$. Тоді бісектриса $\angle BDC$ паралельна бісектрисі $\angle ETY$, бо у цих кутів паралельні сторони. Оскільки за побудовою $\triangle BAE$ рівнобедрений, а $XY \parallel BE$, то $BEXY$ – рівнобедрена трапеція, діагоналі якої перетинаються в точці T. З міркувань симетрії зрозуміло, що бісектриса $\angle ETY$ паралельна основам трапеції, тобто паралельна прямій $l \parallel AV$, що й треба було довести.

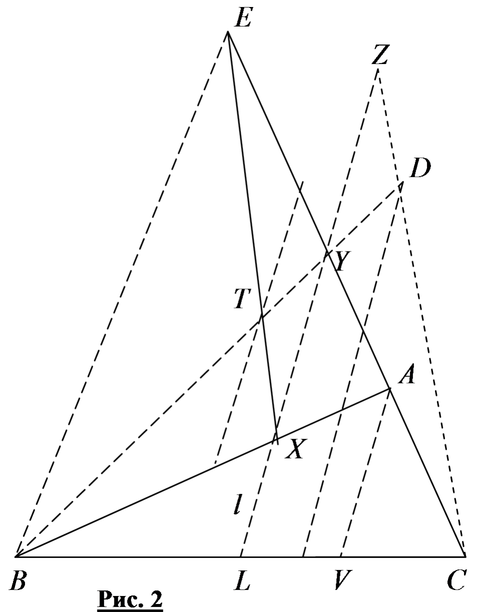

Рис. 2

3. На площині задано n точок, жодні три з яких не лежать на одній прямій. Доведіть, що існує принаймні $\frac{n(n-2)}{3}$ трикутників, вершини яких вибрані серед заданих точок, а всередині трикутників не міститься жодна інша точка з цієї множини.

Розв'язання. Позначимо задану множину точок через S. Виберемо довільні дві точки $X, Y \in S$ та розглянемо півплощину з межею XY, яка містить принаймні одну з інших точок множини S. Розглянемо серед цих точок точку Z – найближчу до прямої XY, тоді трикутник XYZ – один з тих, що задовольняє умови. Дійсно, якби всередині цього трикутника була ще одна точка множини S, то вона очевидно буде ближчою до прямої XY, ніж точка Z (рис.5), оскільки площа $S_{\triangle XYZ} < S_{\triangle XYT}$, тому й висота менша.

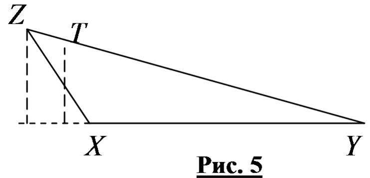

Рис. 5

Припустимо, що у нас рівно k пар точок, які мають властивість, що уся множина S розташована по один бік від прямої, що утворена цими точками. Зрозуміло, що усі ці вершини утворюють опуклу оболонку множини, а тому кількість таких пар не більше від n. Інакше – це просто доводиться методом від супротивного. Для кожної точки може існувати не більше двох інших точок. А тому загальна кількість пар не перевищує n. Для решти пар точок існує принаймні два шуканих трикутники. Таким чином загальна кількість таких трикутників, що підраховуються для кожної пари точок не менше ніж

$$k + 2(C_n^2 - k) = n(n-1) - k \geq n(n-1) - n = n(n-2).$$

Оскільки кожний трикутник міг бути підрахований щонайбільше тричі, то загальна кількість таких трикутників не менше ніж $\frac{n(n-2)}{3}$, що й треба було довести.

4. Натуральні числа a, b, n задовольняють рівність:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{n}{[a,b]} = \frac{1}{(a,b)},$$

де через $[a,b], (a,b)$ відповідно позначені НСК та НСД чисел a, b.

а) Доведіть, що n – непарне.

б) Знайдіть для $n = 2011$ такі значення a, b, для яких сума $a + b$ – мінімальна.

<u>Відповідь:</u> 5 та 504.

<u>Розв'язання.</u> а) Позначимо через $d = (a,b)$, тоді зрозуміло, що $a = dx$, $b = dy$, де числа x, y взаємно прості. Тоді $[a,b] = \frac{ab}{d} = \frac{dxdy}{d} = dxy$. Із заданої рівності маємо, що

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{n}{[a,b]} - \frac{1}{(a,b)} = \frac{1}{dx} + \frac{1}{dy} + \frac{n}{dxy} - \frac{1}{d} = 0,$$

$$y + x + n - xy = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad (x-1)(y-1) = n+1.$$

Оскільки x, y взаємно прості, то принаймні одне з них непарне, звідки ліва частина останньої рівності – парна, тому n – непарне.

б) Без обмеження загальності розгляду вважаємо, що $x \leq y$, тоді з рівності

$$(x-1)(y-1) = 2012 = 2^2 \cdot 503$$

маємо, що $(x-1, y-1) \in \{(1; 2012), (2; 1006), (4; 503)\}$. Звідси

$$(x, y) \in \{(2; 2013), (3; 1007), (5; 504)\}.$$

Зрозуміло, що мінімальна сума $a + b$ буде при $d = 1$ та при $a = x = 5, b = y = 504$.

<u>9 клас</u>

1. Обчислити значення виразу:

$$\frac{\sum\limits_{n=1}^{99} \sqrt{10 + \sqrt{n}}}{\sum\limits_{n=1}^{99} \sqrt{10 - \sqrt{n}}}.$$

<u>Відповідь:</u> $\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2} + 1$.

<u>Розв'язання.</u> Позначимо $\frac{\sum\limits_{n=1}^{99} \sqrt{10+\sqrt{n}}}{\sum\limits_{n=1}^{99} \sqrt{10-\sqrt{n}}} = \frac{S}{T}$. Зауважимо, що $\forall a, b > 0$ має місце рівність: $\sqrt{a + b + 2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$. Таким чином, ми $\forall n = \overline{1, 99}$ підберемо a, b так, щоб $a + b = 20$

і $ab = n$ –з простого квадратного рівняння можна одержати, що $a = 10 + \sqrt{100-n}$ та $b = 10 - \sqrt{100-n}$. Тому справджується рівність:

$$\sqrt{20+2\sqrt{n}} = \sqrt{10+\sqrt{100-n}} + \sqrt{10-\sqrt{100-n}} \quad \Rightarrow$$

$$\sqrt{2}S = \sum_{n=1}^{99} \sqrt{20+2\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{99} \left(\sqrt{10+\sqrt{100-n}} + \sqrt{10-\sqrt{100-n}} \right).$$

Якщо у останній сумі поміняти порядок додавання з $1 \to 99$ на $99 \to 1$, тобто зробити заміну індексі додавання на $n' = 100-n$, то останній ланцюг рівностей можна продовжити таким чином:

$$\sum_{n=1}^{99} \left(\sqrt{10+\sqrt{100-n}} + \sqrt{10-\sqrt{100-n}} \right) = \sum_{n=1}^{99} \left(\sqrt{10+\sqrt{n}} + \sqrt{10-\sqrt{n}} \right),$$

тобто ми одержуємо таку рівність: $\sqrt{2}S = S+T \Rightarrow (\sqrt{2}-1)S = T \Rightarrow \frac{S}{T} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$.

2. Задача 8-2.

3. Задача 8-3.

4. Нехай для функції $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ для кожного натурального числа n та його простого дільника p справджується рівність:

$$f(n) = f\left(\frac{n}{p}\right) - f(p).$$

Відомо, що

$$f(2^{2007}) + f(3^{2008}) + f(5^{2009}) = 2006,$$

обчисліть значення

$$f(2007^2) + f(2008^3) + f(2009^5).$$

Відповідь: 9.

Розв'язання. Якщо $n = p$ – просте число, то $f(p) = f\left(\frac{p}{p}\right) - f(p) = f(1) - f(p)$. Тобто

$$f(p) = \tfrac{1}{2}f(1). \qquad (1).$$

Для простих p, q маємо при $n = pq$:

$$f(n) = f\left(\frac{n}{p}\right) - f(p) = f(q) - f(p),$$

$$f(n) = f\left(\frac{n}{q}\right) - f(q) = f(p) - f(q),$$

звідки з рівності (1) маємо, що $f(n) = f(pq) = 0$.

Для простих p, q, r маємо при $n = pqr$:

$$f(n) = f(pqr) = f\left(\frac{n}{p}\right) - f(p) = f(qr) - f(p) = -\frac{1}{2}f(1).$$

Далі нескладно показати ММІ, що якщо n є добутком k простих множників, то $f(n) = \frac{1}{2}(2-k)f(1)$. Зауважимо, що така функція задовольняє умову задачі.

Із заданої умови

$$2006 = f(2^{2007}) + f(3^{2008}) + f(5^{2009}) =$$
$$= \tfrac{2-2007}{2}f(1) + \tfrac{2-2008}{2}f(1) + \tfrac{2-2009}{2}f(1) = -\tfrac{3\cdot 2006}{2}f(1).$$

Звідси $f(1) = -\frac{2}{3}$. Далі вже неважко обчислити, що

$$f(2007^2) + f(2008^3) + f(2009^5) = f(3^4 \cdot 223^2) + f(2^9 \cdot 251^3) + f(7^{10} \cdot 41^5) =$$
$$= \tfrac{2-6}{2}f(1) + \tfrac{2-12}{2}f(1) + \tfrac{2-15}{2}f(1) = 9.$$

1. Задача 9-1.

2. Нехай G та O відповідно – точка перетину медіан та центр описаного навколо трикутника ABC кола. Серединні перпендикуляри до відрізків GA, GB, GC перетинаються у точках A_1, B_1, C_1. Довести, що O – точка перетину медіан трикутника $A_1B_1C_1$.

Розв'язання. Позначимо як на рисунку середини сторін $\triangle ABC$ через D, E, F, і побудуємо відповідні серединні перпендикуляри до відрізків GA, GB, GC.

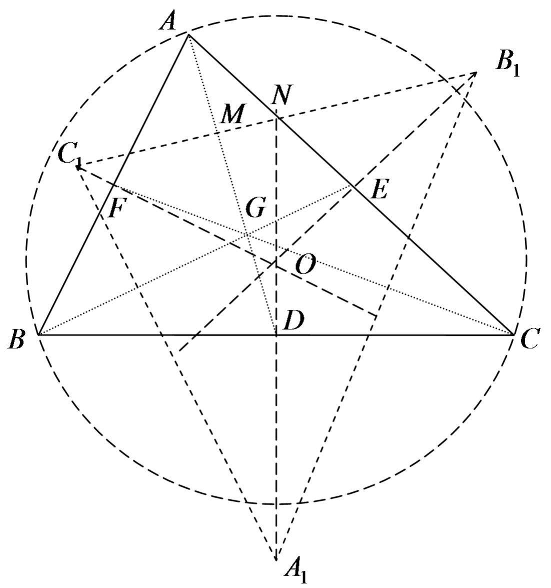

Рис.G-037

Тоді за побудовою точки A_1, B_1, C_1 – центри опсианих кіл навколо триктуників GCB, GAC та GAB відповідно. Тоді A_1D, B_1E та C_1F є серединними перпендикулярами то сторін BC, CA та AB відповідно. зрозуміло, що вони перетинаються у точці O – центрі описаного кола навколо $\triangle ABC$.

Нехай пряма A_1D перетинає відрізок B_1C_1 у деякій точці N. З вписаного чотирирктуника $AMEB_1$ ($\angle AMB_1 = \angle AEB_1 = 90°$) $\Rightarrow$ $\angle MAE = \angle MB_1E = \alpha$, аналогічно з вписаного чотирирктуника $DOEC \Rightarrow \angle ECD = \angle EON = \beta$, тому $\triangle ADC \sim \triangle B_1NO \Rightarrow \frac{NB_1}{NO} = \frac{AD}{CD}$. Треба окремо розглянути випадки, коли $\angle AGC$ гострий або прямий. У цих випадках подібність $\triangle ADC \sim \triangle B_1NO$ зберігається, а доведення цього факту проводиться аналогічним чином. Цей факт зручно відразу доводити орієнтованими кутами.

З вписаного чотирикутника $AMFC_1$ $\angle MAF = \angle MC_1F = \gamma$, аналогічно з $DOFB$ $\angle FBD = \angle FON = \varphi$. З одержаних вище рівностей $\triangle ADB \sim \triangle C_1NO \Rightarrow \frac{NC_1}{NO} = \frac{AD}{BD}$. Таким чином $NB_1 = NC_1$, тобто A_1N – медіана $\triangle A_1B_1C_1$, аналогічно для інших відрізків, оскільки вони проходять через точку O, то це і є точкою перетину медіан $\triangle A_1B_1C_1$, що й треба було довести.

3. Нехай n – натуральне число. У місті X є n дівчат та n хлопців, та кожна дівчина знає кожного хлопця. У місті Y є n дівчат $g_1, g_2, \ldots, g_n$ та $(2n-1)$ хлопців $b_1, b_2, \ldots, b_{2n-1}$. Для кожного $i = \overline{1,n}$ дівчина g_i знає тільки хлопців $b_1, b_2, \ldots, b_{2i-1}$ (з іншими не знайома). Нехай деяке натуральне r таке, що $1 \le r \le n$. У кожному місті r дівчат та r хлопців утворили на вечірці пари для танців, причому кожна дівчина танцює із хлопцем, якого знає. Позначимо через $X(r)$ кількість варіантів, якими ми можемо утворити r пар, що танцюють у місті X, а через $Y(r)$ аналогічну величину у місті Y. Довести, що для кожного $r = \overline{1,n}$ справджується рівність $X(r) = Y(r)$.

Розв'язання. Позначимо ці величини $X_n(r)$ та $Y_n(r)$. Для міста X все дуже просто обчислити. Оскільки усі знайомі, тому можемо вибрати C_n^r способами дівчат, C_n^r способами хлопців, ще $r!$ способів є утворення пар, тому загалом $X_n(r) = (C_n^r)^2 \cdot r! = \frac{(n!)^2}{r! \cdot ((n-r)!)^2}$.

Нехай $A_n(r)$ – кількість різних способів, якими ми можемо утворити танцюючи пари з r дівчат та r хлопців міста Y, де кожна дівчина знайома з своїм хлопцем у парі, при цьому g_n обов'язково одна з цих дівчат. Нехай $B_n(r) = Y_n(r) - A_n(r)$.

Якщо дівчини $n > 1$ g_n немає серед обраних пар, то хлопців b_{2n-2} та b_{2n-1} теж не приймають участі у цих парах, тому $B_n(r) = Y_{n-1}(r)$.

З іншого боку, якщо дівчина g_n є серед цих r пар, то можна розглянути випадок, коли ми маємо вибрати $(r-1)$ дівчину з $(n-1)$, утворити пари з $(r-1)$ хлопцем (за виключенням двох останніх хлопців), після цього множимо на кількість способів, за якими дівчина g_n

може утворити пару з будь-яким хлопцем серед усіх що залишились, тобто серед $(2n-r)$. Таким чином маємо таку рівність: $A_n(r) = (2n-r)Y_{n-1}(r-1)$.

З одержаних двох рівностей індукцією покажемо, що $Y_n(r) = \frac{(n!)^2}{r!\cdot((n-r)!)^2}$.

Очевидно, що $Y_1(1) = 1$. Припустимо, що та рівність вірна для $n = k$. Тоді для $r = \overline{2,k}$ маємо: $Y_{k+1}(r) = A_{k+1}(r) + B_{k+1}(r) = (2(k+1)-r)Y_k(r-1) + Y_k(r) = (2k+2-r)\cdot \frac{(k!)^2}{(r-1)!((k-r+1)!)^2} + \frac{(k!)^2}{r!((k-r)!)^2} = \frac{r(2k+2-r)(k!)^2+(k-r+1)^2(k!)^2}{r!((k+1-r)!)^2} = \frac{((k+1)!)^2}{r!((k+1-r)!)^2}$, що й треба було довести.

Далі для $r = 1$ ми маємо $Y_{k+1}(1) = A_{k+1}(1) + B_{k+1}(1) = (2k+1) + Y_k(1) = (2k+1) + k^2 = (k+1)^2$.

На завершення для $r = k+1$ маємо, що $Y_{k+1}(k+1) = A_{k+1}(k+1) = (k+1) + Y_k(k) = (k+1)\cdot\frac{(k!)^2}{k!} = \frac{((k+1)!)^2}{(k+1)!}$, що й завершує доведення.

4. Задача 9-4.

11 клас

1. Для додатних чисел a, b, c, сума яких дорівнює 3, доведіть нерівність:

$$\frac{a^3+2}{b+2} + \frac{b^3+2}{c+2} + \frac{c^3+2}{a+2} \geq 3.$$

Розв'язання. З нерівності між середніми перепишемо кожен доданок перепишемо таким чином:

$$\frac{a^3+2}{b+2} = \frac{a^3+1+1}{b+2} \geq \frac{3\sqrt[3]{a^3\cdot 1\cdot 1}}{b+2} = \frac{3a}{b+2}.$$

Таким чином, якщо ми доведемо нерівність

$$\frac{a}{b+2} + \frac{b}{c+2} + \frac{c}{a+2} \geq 1,$$

то твердження буде доведене.

Скористаємось таким переформулюванням нерівності К-Б:

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \ldots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2}{b_1+b_2+\ldots+b_n}, \quad (1)$$

де $b_i > 0, i = \overline{1,n}$. (Седракян Н.М., Авоян А.М. "Неравенства. Методы доказательства", с. 115). Зробимо такі перетворення:

$$\frac{a}{b+2} + \frac{b}{c+2} + \frac{c}{a+2} = \frac{a^2}{a(b+2)} + \frac{b^2}{b(c+2)} + \frac{c^2}{c(a+2)} \geq$$

$$\geq \frac{(a+b+c)^2}{a(b+2)+b(c+2)+c(a+2)} = \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca+2(a+b+c)}. \qquad (2)$$

З нерівності трьох квадратів

$$(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca), \qquad (3)$$

тому, якщо тепер використати разом (2) та (3), будемо мати:

$$\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca+2(a+b+c)} \geq \frac{(a+b+c)^2}{\frac{1}{3}(a+b+c)^2+2(a+b+c)} = 1,$$

що й треба було довести.

2. Задача 10-2.
3. Задача 10-3.

4. Знайти всі пари (a,b), натуральних чисел таких, що число $\frac{2a^2-1}{b^2+2}$ – ціле.

Розв'язання. Очевидно, що b – непарне. Розглянемо довільний простий дільник числа b^2+2, тоді $b^2 \equiv -2 \pmod p$ і $(2a)^2 \equiv 2 \pmod p$, а отже $\left(\frac{-2}{p}\right) = \left(\frac{2}{p}\right) = 1$, звідки $\frac{-1}{p} = 1$ і p має вигляд $4k+1$. Оскільки p було обрано довільним чином, то всі прості дільники числа b^2+2 мають вигляд $4k+1$, звідки слідує, що $b^2+2 \equiv 1 \pmod 4$ або $b^2 \equiv -1 \pmod 4$. Отримали суперечність, яке доводить, що таких пар не існує.