Властивості похідної

1. Припустимо, що функція f неперервна на відрізку $[a, b]$ та має похідну в кожній точці інтервала (a, b), і при цьому її похідна – монотонна функція. Доведіть, що якщо існує точка $c \in (a, b)$ для якої $f'(c) = 0$, то в цій точці функція f досягатиме свого найбільшого або найменшого значення на відрізку $[a, b]$.

2. Доведіть, що для довільних дійсних a та b рівняння $x^5 + ax + b = 0$ не може мати більше трьох дійсних розв'язків.

3. Доведіть, що довільний многочлен $P(x)$ степеня більше 0 із додатним старшим коефіцієнтом з деякого момента монотонно зростає.

4. а) Відомо, що функції f та g неперервні на відрізку $[a, b]$ та мають похідні в кожній точці інтервала (a, b), при цьому для довільної точки $c \in (a, b)$ $f'(c) > g'(c)$. Чи випливає звідси, що $f(b) \geq g(b)$?

б) Припустимо, що функції f та g неперервні на промені $(1, +\infty)$, мають похідні в кожній точці, f монотонно та необмежено зростає і при цьому для довільної точки $x \in (1, +\infty)$ виконана нерівність $f'(x) > g'(x)$. Чи може бути так, що для довільної точки $x \in (1, +\infty)$ справджується нерівність $g(x) > f(x)$?

5. (Теорема Коші) Припустимо, що функції f та g неперервні на відрізку $[a, b]$ та мають похідні в кожній точці інтервала (a, b), при цьому похідна від g у кожній точці цього інтервала не рівна 0. Доведіть, що тоді існує число $c \in (a, b)$ таке, що $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)}$.

Також залишаються геометричні задачі з минулого домашнього завдання.