Задача 1. Пусть $\prod_{n=1}^{1996}(1+nx^{3^n}) = 1 + a_1x^{k_1} + \ldots + a_mx^{k_m}$, где $a_1, \ldots, a_m$ ненулевые и $k_1 < \ldots < k_m$. Найти a_{1996}.

Задача 2. Для натурального n обозначим $p(n)$ количество разбиений n в сумму натуральных слагаемых. Количество различных слагаемых в разбиении назовём разбросом. Докажите, что сумма разбросов всех разбиений n равна $1+p(1)+\ldots+p(n-1)$. Докажите, что это число не превосходит $(2np(n))^{1/2}$.

Задача 3. Определим последовательность $a_{k,n} = \binom{n}{k}, n, k \geqslant 0$. Докажите, что двумерная производящая функция $\sum_{k,n\geqslant 0} a_{k,n}x^ky^n$ равна $1/(1-y-xy)$.

Задача 4. Докажите (комбинаторно и алгебраически), что $\sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k}\right)^2 = \binom{2n}{n}$.

Задача 5. Обозначим $f_{m,n}$ количество путей на клетчатой бумаге из $(0,0)$ в (m,n), где при каждом шаге мы сдвигаемся на $(1,0)$, $(0,1)$ или $(1,1)$. Докажите, что двумерная производящая функция $\sum_{m,n} f_{m,n}x^my^n = 1/(1-x-y-xy)$.

Задача 6. С помощью диаграм Юнга докажите, что

(1) Количество разбиений N на слагаемые, не превосходящие n, равно количеству разбиений N на не более чем n слагаемых.

(2) Найдите производящую функцию (по количеству клеток) числа диаграмм Юнга.

(3) Докажите, что число разбиений N на не более чем m слагаемых равно количеству разбиений $N + \dfrac{m(m+1)}{2}$ на m неравных слагаемых.