

Підрахунок двома способами

1. Чи існує випуклий 2017-кутник у якого всі кути цілі?
2. Знайдіть суму коефіцієнтів многочлена $(x^3 - x + 1)^{2017}$.
3. Доведіть, що не існує багатогранника, у якого:
А) всі грані – шестикутники;
Б) в кожній вершині сходиться 6 граней.
4. Трикутник розрізали на випуклі чотирикутники. Доведіть, що хоча б один з них має кут не менше 120 градусів.
5. В місті відмінників від кожної площі відходить рівно 5 вулиць. Доведіть, що число площ парне, а число вулиць ділиться на 5 (вулиці з'єднують площі).
6. В квадраті зі стороною 1 розмістили кілька відрізків паралельних сторонам квадрата. Відрізки можуть перетинати один одного. Сума їх довжин 18. Доведіть, що серед частин, на які квадрат розбито об'єднанням відрізків, знайдеться така, що її площа не менше 0.01.
7. Чотири коника сидять у вершинах квадрата. Кожну хвилину один з них пригає в точку симетричну відносно іншого коника. Доведіть, що коники не можуть одночасно опинитися у вершинах квадрату більшого розміру.
8. На Олімпі є гра: всім богам наливають порівну амброзії, після чого один бог переливає іншому стільки амброзії, скільки у того вже було і це повторюється кілька разів. Одного разу уся амброзія опинилась у чаші Зевса. Довести, що кількість богів є степенем двійки.
9. В класі 21 учень. Кожен день якісь пари з них жмуть один одному руки, а якісь – ні. Відомо, що всього за місяць було виконано 2016 рукостискань. Доведіть, що можна виділити групу з 6 людей так, що між дітьми було виконано 144 рукостискання.
10. У взводі 100 людей. Кожен з 100 днів якісь 4 ставали черговими. Довести, що якісь два були разом на чергуванні не менше 14 разів.
11. Серед 90 людей у кожного не менше 10 друзів. Доведіть, що будь-яка людина може запросити в гості трьох інших так, що серед чотирьох зібравшихся у кожного буде не менше 2 друзів.
12. Гострокутний трикутник розрізали прямолінійним розрізом на дві частини (не обов'язково трикутні), потім одну з них – знову на дві частини і так далі: на кожному кроці вибирали будь-яку частину і розрізали її (по прямій) на дві частини. Через кілька кроків виявилось, що вихідний трикутник розпався на кілька трикутників. Чи можуть вони всі бути тупокутними?
13. В країні 2000 міст. Кожне місто зв'язане двусторонніми авіалініями з деякими іншими містами, при тому для кожного міста число авіаліній, що виходять з нього є степенем двійки. Для кожного міста президент порахував кількість маршрутів, що мають не більше однієї пересадки, що зв'язують дане місто з іншими містами, а потім зсумував ці значення по всім 2000 містам. Чи могло в нього вийти число 100000?

14. Розглянемо всі трикутники з вершинами у вершинах випуклого 1000 кутника. Доведіть, що будь-яка точка, що не лежить на сторонах таких трикутників покривається парним числом таких трикутників.