# Геометрія

Літній математичний табір "Контора $\pi$"
Старша група

## 1 Les accordéons

**Задача 1.** *В трикутнику $ABC$ проведено бісектриси $AL_1$, $BL_2$ і $CL_3$, які перетинаються в інцентрі $I$. Серединний перпендикуляр до відрізку $AL_1$ перетинає прямі $BL_2$ і $CL_3$ в точках $M$ і $N$. Доведіть, що чотирикутник $AMIN$ вписаний.*

**Задача 2.** *(Дуже важливий сюжет!) Дано трикутник $ABC$. Його вписане коло дотикається сторін $AB$, $BC$ в точках $C_0$, $A_0$. Доведіть, що пряма $A_0C_0$, бісектриса кута $A$ і середня лінія трикутника, яка є паралельною до $AB$, перетинаються в одній точці.*

**Задача 3.** *Всередині трикутника $ABC$ обрано точку $P$. Прямі $AP$, $BP$, $CP$ перетинають описане коло трикутника $ABC$ в точках $A_1$, $B_1$ і $C_1$ відповідно. Точки $A_2$, $B_2$, $C_2$ — симетричні відображення $A_1$, $B_1$, $C_1$ відносно середин $BC$, $CA$, $AB$ відповідно. Доведіть, що ортоцентр $ABC$ лежить на описаному колі трикутника $A_2B_2C_2$.*

## 2 Додаткові побудови

**Задача 4.** *Дано рівнобедрений трикутник $ABC$ ($AB = BC$). На сторонах $AB$ і $BC$ обрано точки $D$ і $E$ так, що $BD = CE$ і $\angle ADE + \angle DEB = 60°$. Доведіть, що $DE = AC$.*

**Задача 5.** *Всередині паралелограма $ABCD$ обрано точку $P$ так, що $\angle APB + \angle CPD = 180°$. Доведіть, що $\angle PAD = \angle PCD$.*

**Задача 6.** *Дано прямокутний трикутник $ABC$ з гіпотенузою $AC$ і кутом $\angle A = 50°$. Точки $K$ і $L$ на катеті $BC$ такі, що $\angle KAC = \angle LAB = 10°$. Доведіть, що $CK = 2BL$.*

**Задача 7.** *Дано гострокутний трикутник $ABC$. Нехай $M$ — середина сторони $AB$, а $T$ — сереина меншої дуги $BC$ описаного кола $ABC$. Точка $K$ всередині трикутника $ABC$ така, що $MATK$ є рівнобокою трапецією, причому $AT \parallel MK$. Доведіть, що $AK = KC$.*

**Задача 8.** *Два кола перетинаються в точках $C$ і $D$. Пряма, що проходить через $C$, перетинає перше коло в точці $A$, а друге коло — в точці $B$. Бісектриса кута $\angle ACD$ перетинає перше коло вдруге в $X$, а бісектриса кута $\angle DCB$ перетинає друге коло вдруге в $Y$. Нехай $M$ — середина $AB$. Доведіть, що $\angle XMY = 90°$.*

**Задача 9.** *З точки $A$ проведено дві дотичні $AB$ і $AC$ до кола $\omega$. На продовженні відрізка $AB$ за точку $B$ взято точку $M$. Описане коло трикутника $ACM$ вдруге перетинає $\omega$ в $N$. Нехай $H$ — проекція точки $B$ на $CM$. Доведіть, що $\angle HNM = 2\angle AMC$.*

## 3 Все разом

**Задача 10.** *Нехай $AH$ — висота гострокутного трикутника $ABC$, $K$ і $L$ — проекції $H$ на сторони $AB$ і $AC$. Описане коло трикутника $ABC$ перетинає пряму $KL$ в двох точках $P$ і $Q$, а пряму $AH$ — в $A$ і $T$. Доведіть, що $H$ — інцентр трикутника $PTQ$.*

**Задача 11.** *(IMO SL 2016, G4) Дано трикутник $ABC$ з $AB = AC \neq BC$. Нехай $I$ — ортоцентр $ABC$. Пряма $BI$ перетинає $AC$ в точці $D$, а перпендикуляр до $AC$ в точці $D$ перетинає $AI$ в $E$. Доведіть, що точка, симетрична $I$ відносно $AC$, лежить на описаному колі трикутника $BDE$.*

Хілько Данило
dkhilko@ukr.net