Комбінаторна геометрія

Сердюк Назар, nsaann@gmail.com

1. Нехай n, k – натуральні числа; $2 \leq k \leq [\frac{n}{2}]$. Дано k точок всередині опуклого n-кутника P. Доведіть, що серед вершин P можна вибрати $2k$ так, щоб $2k$-кутник утворений цими вершинами містив усі данні k точок.

2. Нехай S – множина з n точок на площині таких, що відстань між будь-якими двома з них не менша за 1. Доведіть, що існує не більше ніж $3n-6$ пар точок, відстань між якими рівно 1.

3. Дано n точок на площині. Доведіть, що серед них можна вибрати щонайменше $\sqrt{n}$ точок так, щоб будь-які три точки не утворювали рівносторонній трикутник.

4. Дано опуклий $2n$-кутник P з вершинами $P_1, P_2, \cdots, P_{2n}$ і точка Q вередині P, що не лежить на жодній з діагоналей P. Доведіть, що існує сторона цього многокутника така, що жодна з прямих QP_i, $i = 1, 2, \cdots, 2n$ не перетинає цю сторону.

5. Нехай S – множина з n точок на площині таких, що відстань між будь-якими двома не більше 1. Знайдіть найбільшу можливу кількість пар точок відстань між якими дорівнює 1.

6. Доведіть, що для будь-якого опуклого n-кутника існує $n-2$ точок всередині цього многокутника так, щоб будь-який трикутник утворений вершинами данного n-кутника містив рівно 1 з даних точок.

7. Дана множина S, що складається з $n > 14$ точок на площині таких, що відстань між будь-якими двома з них не менша за 1. Доведіть, що існує підмножина T множини S, що складається не менше ніж з $[\frac{n}{7}]$ точок така, що відстань між будь-якими двома точками з T не менша ніж $\sqrt{3}$.

8. Дано $n > 3$ точок на площині. Доведіть, що серед них можна вибрати щонайменше $\sqrt{n} - 1$ точок так, щоб відстань між будь-якими двома з них не дорівнює 1.

9. Знайдіть усі скінченні множини точок S на площині так, щоб жодні три не лежали на одній прямій і якщо $A, B, C \in S$, то існує точка $D \in S$ така, що A, B, C, D – вершини паралелограма.

10. Нехай S – множина з $n \geq 3$ точок на площині жодні три з яких не лежать на одній прямій. Доведіть, що існує множина T, що складається не більше ніж з $2n-5$ точок таких, що будь-який трикутник з вершинами з S містить всередині точку з T.

11. Доведіть, що для будь-якого натурального $n \geq 2$ існує множина, що складається з 2^{n-1} точок на площині така, що жодні три точки не лежать на одній прямій і жодні $2n$ точок не утворюють випуклий $2n$-кутник.

12. На площині розташовано 18 ліхтарів кожен з яких освітлює кут величиною в $20°$. Доведіть, що можна вибрати напрямки освітлення кожного з ліхтарів так, щоб уся площина була освітленою.

13. Нехай n, k – додатні цілі числа і S – множина, що складається n точок на площині таких, що жодні три не лежать на одній прямій і для будь-якої точки $P \in S$ існує щонайменше k точок з S рівновіддалених від P. Доведіть, що $k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$.

14. Нехай $n \geq 2$ і $C_1, C_2, \cdots, C_n$ – кола з радіусом 1 такі, що жодні два кола не дотикаються і об'єднання усіх кіл з'єднане. Доведіть, що кількість різних точок перетину цих кіл не менша ніж n.

15. Дан опуклий n-кутник на площині, для кожних трьох його вершин розглянемо трикутник, що утворений з цих вершин. Назвемо трикутник *хорошим* якщо всі його сторони мають одиничну довжину. Доведіть, що всього існує не більше ніж $\frac{2n}{3}$ хороших трикутників.