7-Й КИЇВСЬКИЙ ВІДКРИТИЙ ТУРНІР МАТЕМАТИЧНИХ БОЇВ ІМЕНІ ЛЕСІ РУБЛЬОВОЇ

вересень – грудень 2010 року

Математична карусель

Молодша ліга. Вихідний рубіж

1. На одній вулиці стоять 4 будинки. Кожен будинок пофарбований в білий, червоний чи жовтий колір. Скількома способами можна розфарбувати будинки, якщо кожні два сусідні різного кольору?

2. x, y – два натуральних числа, таких що $x^y = 256$. Яких значень може набувати сума $x + y$?

3. На автостоянці знаходиться у сумі 100 автомобілів та двоколісних велосипедів, котрі разом мають 356 коліс. Скільки автомобілів знаходиться на стоянці?

4. У протилежних вершинах квадрата зі стороною 1 побудовано два круги радіуса 1. Яка площа перетину цих кругів?

5. Скільки існує трикутників, у яких довжини всіх сторін - цілі числа, а периметр дорівнює 24?

6. В записаній на дошці рівності щезли 3 цифри (їхні місця позначені зірочками): $\overline{4*} \cdot \overline{*1} = \overline{2*09}$. Чому дорівнює сума цих трьох цифр?

7. Олеся на день народження спекла печиво. Половину – з шоколадом, третину решти – з горіхами, четверту частину тих, що без шоколаду та горіхів, – з родзинками, а решту, 9 коржиків, – з ваніллю. Скільки всього коржиків спекла Олеся?

8. У паралелограмі $ABCD$ на стороні CD обрана точка F таким чином, що такі відрізки виявились рівними: $AB = BD$, $DF = FB = BC$. Знайдіть менший кут паралелограма.

9. Цілі числа a, b, c, d задовольняють умову: $1 \le a < b < c < d \le 60$. Скільки існує таких четвірок чисел, що задовольняють умову: $(d - c)(c - b)(b - a)$ ділиться на 2009?

10. Знайдіть найменше натуральне число, десятковий запис квадрату якого містить принаймні три однакові цифри.

11. У магічному квадраті 3×3 відомі числа, що зображені на рис.701. Яке значення може приймати число x? Нагадаємо, що у магічному квадраті співпадають суми чисел кожного рядка, кожного стовпчика та обох великих діагоналей.

x	**21**	**94**
3		

Рис.701

12. На рис.702 зображені два квадрати різних розмірів. Відомо, що не зафарбованою на рисунку залишилась $\frac{7}{8}$ від площі великого квадрату, а також $\frac{7}{9}$ від площі малого квадрату. Знайдіть відношення сторони більшого квадрату до сторони меншого квадрату.

13. На числовій прямій в точках з цілими координатами a, b, c знаходяться 3 камінці. За один хід ми можемо обрати деякі два з них та перемістити один з них вправо на 1, а інший – вліво на 1. При яких a, b, c можна за деяку скінченну послідовність ходів усі три камінці зібрати в одній точці?

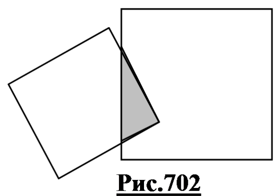

Рис.702

14. Знайти усі такі трицифрові числа $\overline{aab}$, $a, b \neq 0$, які задовольняють умову:

$$\overline{aab} + \overline{aba} + \overline{baa} = 1998.$$

15. Сільський гіпнотизер Тарасик розводить півнів та курок. Внаслідок його гіпнозу десята частина півнів вважає себе куркою, десята частина курок вважає себе півнем. Якщо розглянути усіх, то п'ята частина усіх птахів вважають себе півнями. Яку частину усіх птахів насправді складають півні?

16. У трикутнику ABC точка M – середина сторони AC, точка N обрана на стороні AB таким чином, що відрізок MN перпендикулярний до сторони AC. Також відомо, що $\angle MNC = \angle ABC$, $\angle BCN = 2\angle BAC$. Знайдіть кути трикутника ABC.

17. Скільки існує чотирицифрових чисел, які кратні 9, і усі цифри яких різні та непарні?

18. Знайти усі трійки ненульових цифр a, b, c, для яких виконується рівність: $\overline{a,b} \cdot c = a + b + c$ (число $\overline{a,b}$ означає a цілих та b десятих).

19. Знайти правильний нескоротний додатний дріб, який збільшиться у 3 рази, якщо його чисельник піднести до куба, а до знаменника додати 3.

20. Задана трапеція $ABCD$ з основами AD та BC. Відомо, що бісектриса кута ABC перетинає середню лінію трапеції в точці P, а основу AD в точці Q. Знайдіть величину кута APQ.

Молодша ліга. Заліковий рубіж

1. Є 5 відрізків довжини 2, 3, 4, 5 та 8. Навмання вибираються 3 відрізки. Яка імовірність того, що з цих відрізків можна утворити трикутник?

2. Сума двоцифрового та чотирицифрового чисел, кожне з яких не ділиться на 10, дорівнює 2023, а сума чисел, що записані тими самими цифрами у зворотному порядку, дорівнює 8053. Знайти усі пари таких чисел.

3. В шкільному оркестрі є 12 хлопчиків та 18 дівчат. Середній вік хлопців – 10,5 років, а середній вік усіх дітей в оркестрі – 11 років. Який середній вік дівчат в оркестрі?

4. В трикутнику ABC кут A на 25° більший від кута C. На стороні AC є точка K, для якої виконується рівність $AB = BK$. Знайдіть величину кута KBC.

5. В шаховому одноколовому турнірі грали 3 учні 10 класу та n учнів 9 класу. Відомо, що усі учні 10 класу разом набрали 10 очок, а усі учні 9 класу набрали однакову кількість очок. Відомо, що у цього турніру був єдиний переможець. При яких n це можливо? (Нагадаємо, що у шахах за перемогу дають 1 очко, за нічию дають $\frac{1}{2}$ очка, за поразку - 0 очок).

6. Знайдіть усі семицифрові числа, які починаються з цифр 1992 та діляться на кожне з чисел 6, 7, 8 та 9.

7. Сума двох чисел дорівнює 10, а добуток дорівнює (-56). Чому дорівнює сума квадратів цих чисел?

8. У чотирикутнику $ABCD$ кути ADC та DCB – прямі, $\angle ACB = 45^\circ$, $\angle BDA = 60^\circ$. Знайдіть менший кут між діагоналями чотирикутника.

9. Числа $1, 2, \ldots, 12$ розбиті на пари таким чином, що сума чисел у кожній парі є простим числом, та усі 6 утворених простих чисел різні. Знайти хоч одне подібне розбиття на пари.

10. Число, що утворюється шляхом приписування квадрата деякого натурального числа n до куба цього ж числа, записується цифрами $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$, при цьому кожна цифра використовується рівно 1 раз. Знайдіть усі такі числа n.

11. Дійсні числа x, y задовольняють умову $x^4y^2 + x^2y^4 - 9x^2 - 9y^2 + 9x^2y^2 = 81$. Чому дорівнює значення добутку xy?

12. Точку M всередині квадрата з'єднали з чотирма його вершинами, і утворилися 4 трикутники, один з яких є рівнобедреним з кутом 150°. Визначити кути трьох інших трикутників.

13. Маємо золотий незамкнений ланцюжок, що складається рівно з 23 однакових ланок, кожна з яких має вагу 1 грам. Скільки щонайменше ланок достатньо роз'єднати, щоб можна було скласти будь-яку цілу вагу від 1 грама до 23? Роз'єднані ланки також можна використовувати.

14. Замінити у виразі $T : E = N, NIS$ букви ненульовими цифрами і одержати правильну рівність. Однаковим буквам повинні відповідати однакові цифри, різним - різні.

15. Андрій та Олеся повинні з Троєщини дістатися до ВДНГ, яке знаходиться на відстані 40 км. Вони можуть рухатись пішки, або їхати на одномісному велосипеді. Андрій пішки йде зі швидкістю 6 км за годину, а на велосипеді – 20 км за годину, Олеся відповідно має швидкості 4 та 30 км за годину. Велосипед можна залишати без догляду на дорозі, час визначається по останньому з них, хто прибуває на ВДНГ. За який час найшвидше вони можуть дістатися до місця призначення? Відповідь надати у хвилинах.

16. Бісектриса і медіана, що проведені з вершини прямого кута прямокутного трикутника, утворюють рівнобедрений трикутник. Знайти найменший кут цього прямокутного трикутника.

17. У шаховому одноколовому турнірі взяли участь 5 учасників: А, Б, В, Г і Д. Відомі такі результати їхнього виступу: А має рівно 2 перемоги; Б усі партії завершив внічию; В програв тільки 1 партію єдиному учаснику, який набрав найменшу кількість очок; Г набрав на $\frac{1}{2}$ очка менше від учасника Д. Скільки очок набрав кожний учасник за результатами турніру? Нагадаємо, що у шахах за перемогу нараховується 1 очко, за нічию – $\frac{1}{2}$ очка, за поразку – 0 очок.

18. Чотири дівчинки співали на концерті. Кожну пісню виконували одночасно 3 дівчинки. Катя співала 9 пісень – більше за усіх, а Олена – 5 пісень, менше за усіх. Скільки пісень співала Маша і скільки Ніна? Вкажіть усі можливі відповіді.

19. Групу туристів вирішили розсадити по автобусах таким чином, щоб у кожному автобусі була однакова кількість туристів. Спочатку саджали по 22 пасажири, але виявилось, що не вдається розмістити 1 туриста. Коли 1 автобус поїхав порожнім, то виявилось, що в решту автобусів усі сіли порівну. Скільки було туристів у групі, якщо у кожний автобус поміщалося не більше, ніж 32 пасажири?

20. Знайти кут у градусах між годинною та хвилинною стрілками у момент часу 7 годин 38 хвилин.

Середня ліга. Вихідний рубіж

1. Скільки існує варіантів PIN-кодів з 4 цифр, у яких перша цифра – 1 або 2, остання – 8 чи 9, а сума усіх цифр – парне число?

2. Скільки існує різних наборів по шість цифр (a, b, c, x, y, z), для яких $ax \neq 0$, а також виконується рівність: $\overline{abc} + \overline{ab} + a = 2^{\overline{xy}} + 2^z$?

3. Задача № 3 молодша ліга вихідний рубіж.

4. В коло радіуса 2 вписано рівносторонній трикутник та квадрат так, що сторона квадрата та одна зі сторін трикутника паралельні. Яка відстань між ближчою парою паралельних сторін?

5. Задача № 5 молодша ліга вихідний рубіж.

6. Знайти усі такі цілі значення x, при яких вираз $x^2 - 7x + 10$ є квадратом цілого числа.

7. Знайти усі трійки чисел x, y, z, які задовольняють рівності:

$$x + yz = y + zx = z + xy = 6.$$

8. В рівнобедреній трапеції $ABCD$ сторона AD паралельна BC. Сторони AB, BC та CD однакової довжини, а сума кутів BAD та ADC – 80 градусів. Діагоналі AC та BD перетинаються в точці O. Чому дорівнює в градусах величина кута AOD?

9. Задача № 9 молодша ліга вихідний рубіж.

10. Задача № 10 молодша ліга вихідний рубіж.

11. Задача № 11 молодша ліга вихідний рубіж.

12. Задача № 12 молодша ліга вихідний рубіж.

13. За круглим столом сидять 30 людей, кожний з яких або лицар, який завжди каже правду, або брехун, який завжди бреше. Точно відомо, що серед двох сусідів кожного брехуна є рівно 1 брехун. При опитуванні рівно 12 сказали, що рівно 1 їхній сусід брехун, а решта сказали, що обидва їхні сусіди брехуни. Скільки насправді брехунів сидить за столом?

14. Задача № 14 молодша ліга вихідний рубіж.

15. Задача № 15 молодша ліга вихідний рубіж.

16. У трапеції $ABCD$ з основами AD та BC, O – точка перетину діагоналей, відомі площі $S_{AOD} = S_1$ та $S_{BOC} = S_2$. Знайти площу трапеції.

17. У купі N камінців. Двоє беруть з цієї купи камінці за таким правилом – наступним своїм ходом гравець може взяти кількість камінців, що дорівнює одному з дільників числа

камінців, які своїм останнім ходом взяв інший гравець. Перший гравець своїм першим ходом може взяти будь-яку кількість камінців, відмінну від N. Виграє той, хто бере камінці останнім. При якому найменшому $N > 2010$ другий гравець має виграшну стратегію?

18. Задача № 18 молодша ліга вихідний рубіж.

19. Знайдіть цілу частину виразу

$$\underbrace{\sqrt{1996+\sqrt{1996+\ldots\sqrt{1996}}}}_{2010 \text{ чисел}}.$$

20. У опуклому восьмикутнику $ABCDEFGH$ усі кути рівні, а сторони дорівнюють відповідно $AB = 7$, $BC = 4$, $CD = 2$, $DE = 5$, $EF = 6$, $FG = 2$. Знайдіть довжини сторін GH та HA.

Середня ліга. Заліковий рубіж

1. Андрій та Олеся грають у гру без нічиїх до 3 перемог, в якій ймовірність виграшу кожної партії для них однакова. Олеся виграє перший раунд. Яка ймовірність того, що вона виграє усю гру до трьох перемог?

2. Знайти усі такі прості числа p, q та натуральні n, для яких виконуються умови: $20n^2 + n - 1 = p^2 q$ та $p^2 = q + 8$.

3. Сума двох чисел дорівнює 10, а добуток дорівнює 26. Вкажіть усі можливі значення, яких може набувати сума квадратів цих чисел.

4. Коло дотикається до прямої l у точці A. Точка P обрана на колі, а точка N на прямій l таким чином, що відрізок PN перпендикулярний до прямої l і перетинає коло тільки в точці P. Відомо, що $AN = 8$, $PN = 6$, знайти радіус кола.

5. Задача № 5 молодша ліга заліковий рубіж.

6. Для натурального числа n позначимо через $d(n)$ – найменший дільник числа n, відмінний від 1. Знайти усі пари натуральних чисел a, b, для яких виконується рівність: $a^2 + b^2 = (d(a))^2 + 3(d(b))^4$.

7. Відомо, що $0 \le a \le b \le c \le d \le e$ та $a + b + c + d + e = 100$. Яке найменше можливе значення може приймати вираз $a + c + e$?

8. На деякому колі у вказаному порядку розташовані точки A, B, C, D, при цьому $AB = 1$, $BC = 2$, $CD = 3$ та $\angle ADC = 60^\circ$. Знайдіть довжину відрізка AD.

9. Задача № 9 молодша ліга заліковий рубіж.

10. Задача № 10 молодша ліга заліковий рубіж.

11. Задача № 11 молодша ліга заліковий рубіж.

12. У трикутнику ABC відомі сторони $AC = 3$, $AB = 3\sqrt{7}$ та кут $\angle C = 60^\circ$. Бісектриса CL перетинає описане навколо $\triangle ABC$ коло у точці D. Знайдіть довжину відрізка CD.

13. Нехай n – натуральне число. Знайдіть кількість пар натуральних чисел (a, b), для яких виконується рівність: $(4a - b)(4b - a) = 2010^n$.

14. Натуральні числа x, y мають відповідно 18 та 12 дільників, а їхній НСД $(x, y) = 24$. Які значення може приймати НСК $[x, y]$?

15. Задача № 15 молодша ліга заліковий рубіж.

16. Три висоти трикутника перетинаються в точці H. Одна висота у цій точці ділиться навпіл, інша у відношенні $2 : 1$, рахуючи від вершини. У якому відношенні, рахуючи від вершини, у цій точці ділиться третя висота трикутника?

17. Задача № 17 молодша ліга заліковий рубіж.

18. На Новий 2010 рік Андрій вирішив розв'язувати задачі з математики. Кожного п'ятого дня він розв'язує задачки з комбінаторики, кожного сьомого – з теорії чисел, а кожного одинадцятого дня – з геометрії. Отже, він розпочав тренування вже 5 січня (комбінаторика), 7 січня (теорія чисел), 11 січня (геометрія). Та якось одного ранку Андрій прокинувся та не міг згадати, який же сьогодні день... І єдине, що він пам'ятав, що вчора він розв'язував задачі з геометрії, позавчора – комбінаторики, а позапозавчора – теорії чисел. Цього року Андрій слідкував за своєчасною підготовкою, а також ще не пройшло року

з Нового року, коли Андрій розпочав займатись по такій системі. Допоможіть Андрієві згадати, який сьогодні день року.

19. Відомо, що дійсні числа $x \neq y$ задовольняють рівності $x^4 + 5x^3 = y$ та $y^3 + 5x^2 = 1$. Чому дорівнює значення виразу $x^3 + x^2y + xy^2$?

20. У опуклому п'ятикутнику кожна діагональ паралельна одній із сторін. Яке максимальне та мінімальне відношення може приймати відношення діагоналі до паралельної їй сторони п'ятикутника?

Старша ліга. Вихідний рубіж

1. Задача № 1 середня ліга вихідний рубіж.

2. Задача № 2 середня ліга вихідний рубіж.

3. Задача № 3 молодша ліга вихідний рубіж.

4. У прямокутному трикутнику ABC з прямим кутом при вершині C проведена висота CH. Позначимо радіуси кіл, що вписані у трикутники ABC, ACH та CHB, через r, r_1 та r_2 відповідно. Відомо, що периметр трикутника, який має сторонами відрізки r, r_1 та r_2, дорівнює $\frac{1}{4}AB$. Визначіть найменший кут трикутника зі сторонами r, r_1, r_2.

5. Усі клітини дошки 11×11 пофарбовані у білий колір. Дозволяється обрати будь-які 4 білі вершини, що розташовані у вершинах квадрата зі сторонами, що паралельні сторонам дошки, та пофарбувати дві з них, які розташовані по діагоналі, у чорний колір. Скільки щонайбільше чорних клітин можна одержати за допомогою таких операцій?

6. Шестицифрове число називається "майже простим", якщо його не можна подати у вигляді добутку трицифрового та чотирицифрового чисел. Яка найбільша кількість майже простих шестицифрових чисел може йти поспіль?

7. При яких значеннях параметра a корені квадратного рівняння $x^2+(a+2)x+(a-1) = 0$ задовольняють умову $x_1 + \frac{1}{x_1+1} + x_2 + \frac{1}{x_2-1} = 0$?

8. Опуклий п'ятикутник $ABCDE$ вписаний у коло з діаметром AC. При цьому виявилось, що $AE = 2CE$, $AD = 10CD$. Позначимо точки $M = AC \cap BD$, $N = AC \cap BE$. При якому значенні відношення $\frac{AB}{BC}$ відрізки AN, NM та MC утворюють у вказаному порядку арифметичну прогресію?

9. Скільки існує чотирицифрових чисел, які не діляться на 998 і у яких перша та остання цифри – парні?

10. Скільки одиниць у запису числа:

$$9 + 99 + 999 + \ldots \underbrace{99\ldots9}_{1964}?$$

11. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x^4 - y^4 = 240, \\ x^3 - 2y^3 = 3(x^2 - 4y^2) - 4(x - 8y). \end{cases}$$

12. На рис.703 наведена розгортка опуклого багатогранника. Сторона квадрата дорівнює 2, крім того на розгортці є відрізки довжини 1 та $\sqrt{2}$, зокрема трикутник є правильним з такою стороною. Знайдіть об'єм цього багатогранника.

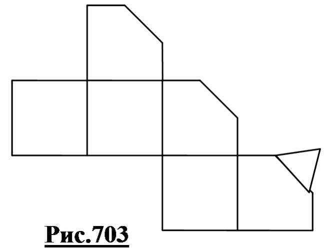

Рис.703

13. Задача № 13 середня ліга вихідний рубіж.

14. Знайти усі натуральні числа x, y, які задовольняють рівняння:

$$x^2 + 2xy + 2y^2 + 2y = 1988.$$

15. Для функції $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ відомо, що існує дійсне число a, що $f(a) = \frac{1}{2}$, а також для усіх дійсних ненульових x, y виконується рівність:

$$f(x) - f(y) = f(x)f\left(\frac{1}{y}\right) - f(y)f\left(\frac{1}{x}\right).$$

Знайти $f(-1)$.

16. Визначіть кут $\angle C$ трикутника ABC зі сторонами a, b, c, які задовольняють рівність:

$$\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}=\frac{3}{a+b+c}.$$

17. Задача № 17 середня ліга вихідний рубіж.

18. Знайдіть найменше натуральне число, яке закінчується цифрою 6 та збільшується у 4 рази, якщо його останню цифру витерти та написати її першою цифрою нового числа.

19. Знайдіть усі послідовності натуральних чисел a_n, які задовольняють умови: $a_1 = 1$ та $a_{m+n} = a_n + a_m + mn$ для будь-яких натуральних чисел m, n.

20. Задача № 20 середня ліга вихідний рубіж.

Старша ліга. Заліковий рубіж

1. В коробці знаходяться 10 кульок блакитного, червоного та жовтого кольорів, причому кульок жовтого кольору найбільше. Ймовірність після трьох витягань дістати кульки трьох різних кольорів дорівнює $\frac{3}{10}$ (після цього кульки не повертаються до коробки). Скільки у коробці кульок кожного кольору?

2. Задача № 2 середня ліга заліковий рубіж.

3. Задача № 3 середня ліга заліковий рубіж.

4. У чотирикутник $ABCD$ вписане коло з центром у точці O. Через точки A, B, C та D перпендикулярно OA, OB, OC та OD проведені прямі l_a, l_b, l_c та l_d відповідно. Прямі l_a та l_b перетинаються в точці K, прямі l_b та l_c – у точці L, l_c та l_d – у точці M, прямі l_d та l_a перетинаються у точці N. Якщо довжини відрізків OK, OL, OM дорівнюють відповідно p, q, r, знайдіть довжину відрізка ON.

5. Задача № 5 молодша ліга заліковий рубіж.

6. Задача № 6 середня ліга заліковий рубіж.

7. Визначити усі трійки попарно різних дійсних чисел a, b, c, для яких кубічне рівняння $x^3 + abx^2 + bcx + ca = 0$ з невідомою x має три дійсних корені a, b, c.

8. У трикутнику ABC на сторонах AB, BC та CA відповідно відкладені відрізки $AD = \frac{1}{3}AB$, $BE = \frac{1}{3}BC$, $CF = \frac{1}{3}CA$. Знайдіть відношення площі трикутника, що утворений прямими CD, BF та AE, до площі трикутника ABC.

9. На нескінченному листі паперу в клітинку деякі клітини пофарбовані у синій колір таким чином, що у будь-якому прямокутнику 2×3 (будь-якої орієнтації) рівно 2 клітини сині, решта клітин – білі. Скільки синіх клітин може міститись у прямокутнику розміру 19×88? Навести усі можливі відповіді.

10. Розв'язати у цілих числах рівняння: $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1976}$.

11. Послідовність (a_n) задається умовами: $a_1 = 2$, $a_2 = 1$, $\frac{2}{a_n} = \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}}$, $n > 1$. Знайдіть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

12. Задача № 12 середня ліга заліковий рубіж.

13. Задача № 13 середня ліга заліковий рубіж.

14. Задача № 14 середня ліга заліковий рубіж.

15. У виразі $(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2$, $a_i \neq 0, i = \overline{1,n}$, $n > 1$, після піднесення до квадрату деякі подвійні добутки виявилися додатними, а інші – від'ємними. При яких n можливо, що кількість додатних подвійних добутків дорівнює кількості від'ємних подвійних добутків?

16. У опуклому чотирикутнику $ABCD$ рівні діагоналі, а також $\angle BAC = \angle ADB$, $\angle CAD + \angle ADC = \angle ABD$. Знайдіть величину кута BAD.

17. Знайдіть суму усіх непарних чотирицифрових чисел, які можна записати за допомогою цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, якщо цифри у числі можуть повторюватись.

18. Задача № 18 середня ліга заліковий рубіж.

19. Задача № 19 середня ліга заліковий рубіж.

20. Задача № 20 середня ліга заліковий рубіж.

6-Й КИЇВСЬКИЙ ТУРНІР МАТЕМАТИЧНИХ БОЇВ ІМЕНІ ЛЕСІ РУБЛЬОВОЇ

Математична карусель

Молодша ліга. Вихідний рубіж

1. Оскільки перший будинок можна пофарбувати у будь-який колір, а кожен наступний у будь-який з двох, відмінних від попереднього, то усього маємо $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 24$ варіанти.
2. $x^y = 256 = 256^1 = 16^2 = 4^4 = 2^8$, звідки випливає, що сума $x + y$ може набувати одного з чотирьох значень: 257, 18, 8, 10.
3. Якби всі були велосипеди, було б 200 коліс. Ми маємо на 156 коліс більше, тобто $\frac{156}{2} = 78$ автомобілів.
4. Площа сектору $\frac{\pi}{4}$. Площа частини квадрату поза сектором – $1 - \frac{\pi}{4}$ (рис.704). Отже, площа перетину - $1 - 2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} - 1$

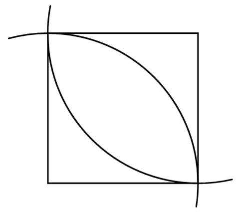

Рис.704

5. Проведемо перебір по довжині найменшої сторони, при цьому найбільша сторона має максимальну можливу довжину 11. Якщо вона дорівнює 1, то таких трикутників не існує, якщо 2, то 1 трикутник (2-11-11), якщо 3, то 1 трикутник (3-10-11), якщо 4, то 2 трикутники (4-9-11 та 4-10-10), якщо 5, то 2 трикутники (5-8-11 та 5-9-10), якщо 6, то 3 (6-7-11, 6-8-10 та 6-9-9), якщо 7, то 2 (7-7-10 та 7-8-9), нарешті, якщо 8, то 1 трикутник (8-8-8). Більше трикутників не існує, бо менша сторона не може бути більшою від 8. Загалом – 12 трикутників.

6. Оскільки остання цифра добутку – 9, а остання цифра другого множника – 1, то маємо: $\overline{49} \cdot \overline{*1} = \overline{2*09}$. Оскільки добуток більше 2000, але менше 3000, то друга цифра – 4, 5 або 6. Неважко переконатись, що підходить лише 4. Тоді третя цифра – 0. Отже, сума цифр рівна 13.

7. Без шоколаду та горіхів всього 12 коржиків, без шоколаду – 18. Отже, всього 36 коржиків.

8. Позначимо менший кут паралелограма $\angle BAD = \angle BCD = \alpha$, далі послідовно знаходимо, що $\angle BFC = \angle ADB = \alpha$, $\angle BFD = \pi - \alpha$, тоді з рівнобедреного трикутника BDF $\angle BDF = \angle DFB = \frac{\alpha}{2}$. Тоді з рівності кутів $\angle ABD = \angle BDC$ маємо таку рівність $\frac{\alpha}{2} = \pi - 2\alpha \Rightarrow \alpha = 72°$.

9. Оскільки $2009 = 41 \cdot 7 \cdot 7$, то повинно одна з цих різниць бути рівною 41, але тоді дві інші повинні дорівнювати 7, бо 49 воно не може дорівнювати. Якщо $d - c = 41$, $c - b = 7$, $b - a = 7 \Rightarrow b = a + 7$, $c = a + 14$, $d = a + 55$, звідки вже легко зрозуміти, що таких четвірок усього 5. Так само для інших двох варіацій, коли $d - c = 7$, $c - b = 41$, $b - a = 7$ та $d - c = 7$, $c - b = 7$, $b - a = 41$.

10. Будемо шукати квадрат числа. Легко зрозуміти, що цей квадрат має принаймні 4 цифри. Тому у шуканого квадрату співпадають або перші дві, або останні дві цифри. Шляхом остачі при діленні на 4 з'ясовуємо, що він може мати останніми цифрами лише 00 або 44. Далі простий перебір, при цьому останні цифри 00 можна відкинути. А останні цифри 44 може дати число, яке закінчується на 2 або на 8.

Найменше число, квадрат якого чотирицифрове число це $32^2 = 1024$. Далі перші цифри 11 має число $34^2 = 1156$, і нарешті, $38^2 = 1444$ – шукане число.

11. Сума чисел у кожному з рядків дорівнює $115 + x$ (рис.706), тому послідовно знаходимо, числа у таблиці через x. Спочатку знаходимо лівий нижній елемент – це 112, далі посередині за рахунок однієї з діагоналей – $(x - 91)$, далі треті елементи у другому стовпчику та другому рядку – відповідно 185 та 203. Нарешті знаходимо правий нижній елемент - це $x - 182$. Залишається прирівняти суму елементів іншої діагоналі та суму кожного з рядків: $3x - 273 = 115 + x$, звідки остаточно знаходимо, що $x = 194$.

x	**21**	**94**
3	**x-91**	**203**
112	**185**	**x-182**

Рис.706

12. З умов задачі зафарбованою частиною є $\frac{1}{8}a^2$ більшого квадрату та $\frac{2}{9}b^2$ меншого квадрату, де через a, b позначені їх сторони (рис.707). Оскільки зафарбована частина спільна, то маємо таку рівність: $\frac{1}{8}a^2 = \frac{2}{9}b^2$ звідки випливає, що $\frac{a^2}{b^2} = \frac{16}{9} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{4}{3}$.

13. Під час кожного кроку сума не змінюється. Отже, якщо камінці зберуться в одній точці, то сума координат ділиться на 3. Доведемо, що якщо сума координат ділиться на 3, то тоді можливо зібрати в одній точці. Нехай сума координат – $3n$. Тоді за деяку послідовність ходів один з камінців можна перевести в точку n. Тоді інші два камінці мають координати $n-k$ та $n+k$. За k кроків ці два камінці можна перевести в одну точку.

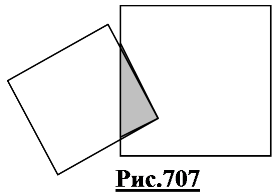
Рис.707

14. Якщо додати усі ці числа, подавши їх у десятковому запису, то одержимо, що $222a+111b = 1998$, або $2a+b = 18$, далі простий перебір можливих цифр дає такі відповіді: 558, 666, 774, 882.

15. Нехай у Тарасика x курок та y півнів. Півнями себе вважають $0,9y$ півнів та $0,1x$ курок. І це є п'ятою частиною від усіх птахів, тобто $0,9y + 0,1x = 0,2(x+y)$ звідки $x = 7y$, тому $x+y = 8y$, звідки випливає, що півні складають $\frac{1}{8}$ частину від усіх птахів.

16. Оскільки MN – серединний перпендикуляр до сторони AC (рис.708), тому $AN = NC \Rightarrow \angle BAC = \angle NCA = \alpha$, якщо $\angle MNC = \beta$, то $\beta+\alpha = \frac{\pi}{2}$. Тоді $\angle ABC = \beta$, $\angle NCB = 2\alpha \Rightarrow 3\alpha = \frac{\pi}{2}$. Тому $\angle A = 30°$, $\angle B = 60°$, $\angle C = 90°$.

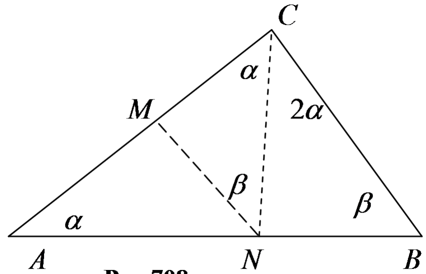

Рис.708

17. Простим перебором неважко переконатись, що задовольняють умову лише така четвірка 1, 3, 5 та 9. Не можна жодну з цих цифр поміняти на 7, щоб залишилась подільність на 9. Таким чином усього таких чисел $24 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

18. Умову задачі можна переписати таким чином: $ac+0,1bc = a+b+c$ звідки випливає, що $0,1bc$ – ціле число. А це можливе лише за умови, що одна з цих цифр парна і не 0, а інша – 5. Перебором одержимо такі дві відповіді: $(6,5,2)$ та $(2,6,5)$.

19. Позначимо цей дріб $\frac{x}{y}$, $0 < x < y$, тоді $\frac{3x}{y} = \frac{x^3}{y+3}$ звідки одержимо рівність: $9 = y(x^2-3)$. З неї маємо, що $0 \le x^2 - 3 \le 9$, таким чином $x = 2$ або $x = 3$. Умову задовольняє лише $x = 2$, звідки знаходимо, що $y = 9$ і шуканий дріб $\frac{2}{9}$.

20. Оскільки $\angle AQB = \angle CBQ = \angle ABQ$, то $\triangle ABQ$ рівнобедрений, $AB = AQ$, тому AP – медіана цього триктуника, а тому вона також і висота, звідки $\angle APQ = 90°$ (рис.709).

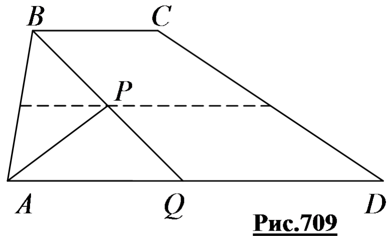

Рис.709

Молодша ліга. Заліковий рубіж

1. З цих відрізків можна скласти 4 трикутники: $(2,3,4)$, $(3,4,5)$, $(2,4,5)$, $(4,5,8)$. Усього можна обрати 10 способами 3 різних відрізки, тому шукана імовірність складає $\frac{4}{10} = 0,4$.

2. Оскільки двоцифрове число не більше від 99, то чотирицифрове повинно починатись з цифр 19 або 20, оскільки воно не менше за 1924. Так само перегорнуте чотирицифрове число починається з 79 або 80. Тому достатньо перебрати такі 4 числа: 1997, 1908, 2097 та 2008. Перевіркою одержуємо пари (1997, 26) та (2008, 15) які й дають шукану відповідь.

3. Сума років хлопців – 126. Сума років усіх дітей – 330. Отже, сума років дівчат - 204. Отже, середній вік дівчат – $\frac{204}{18} = \frac{34}{3}$.

4. Оскільки трикутник ABK рівнобедрений (рис.710), то $\angle BKA = \angle A$, тому $\angle BKC = 180° - \angle A$, оскільки за умовою $\angle C = \angle A - 25°$, то $\angle KBC = 180° - \angle BKC - \angle C = 25°$.

5. Нехай кожний з n учнів 9 класу набрав k очок. Тоді кількість набраних очок можна підрахувати двома способами: $10 + kn = \frac{1}{2}(n+3)(n+2) \Rightarrow n^2 + 5n = 14 + 2kn$,

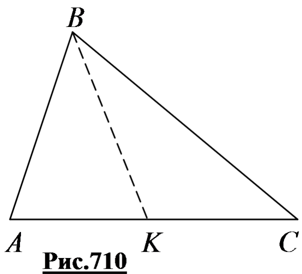

Рис.710

оскільки число $2k$ завжди ціле, то $14 \vdots n$, тому залишається перебрати лише варіанти $n = 1, n = 2, n = 7, n = 14$.

$n = 1 \Rightarrow k < 0$ – суперечність.

$n = 2 \Rightarrow k = 0$ – суперечність, оскільки учні 9 класу грали між собою і не могли набрати 0 очок.

$n = 7 \Rightarrow k = 5$ – варіант можливий. Приклад відповідної таблиці з потрібним розподілом очок легко навести.

$n = 14 \Rightarrow k = 9$ – суперечність, оскільки десятикласники грамі між собою, тому кращий з них не міг набрати більше від 9 очок (1 очко розігрувалось між двома гіршими), тому переможець не міг набрати більше 9 очок, тобто він був не єдиний.

6. Ці числа повинні ділитись на 504, знайдемо остачу при діленні числа 1992000 на 504 – це число 192, тому дописати можна або 312, або 816, звідки й маємо дві відповіді: 1992312 та 1992816.

7. $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 100 + 112 = 212$. Легко зрозуміти, що такі числа існують – це 14 та -4.

8. $\angle ACD = 45°$, $\angle CDB = 30° \Rightarrow$ один з кутів між діагоналями складає 105°, тому менший кут дорівнює 75°.

9. Для розв'язання достатньо навести приклад:

$$2 + 3 = 5, 1 + 6 = 7, 4 + 7 = 11, 5 + 8 = 13, 9 + 10 = 19, 11 + 12 = 23$$

.

10. Разом квадрат та куб числа мають 8 цифр, зрозуміло, що єдина можливість – квадрат має 3 цифри, а куб – 5 цифр (усі інші варіанти – 1 та 7, 2 та 6, 4 та 4 очевидно не можливі). Тоді можемо записати для шуканого числа a такі нерівності: $100 \le a^2 < 1000$ та $10000 \le a^3 < 100000$. Звідси легко знаходимо, що з першої нерівності $10 \le a \le 31$ та $22 \le a \le 46 \Rightarrow 22 \le a \le 31$.

Вже можна зробити простий перебір, але ще можна скоротити його за рахунок відкидання чисел, що очевидно не підходять:

$22^2 = 484$ – однакові цифри;

23^2 - закінчується на 9;

$24^2 = 576, 24^3 = 13824$ – відповідь;

25 – і куб, і квадрат закінчуються на 5;

26 – обидва закінчуються на 6;

27^2 – закінчується на 9;

$28^2 = 784, 28^3 = 21952$ – не задовольняє;

29 – куб закінчується на 9;

30^2 – закінчується на 0;

31 – обидва закінчуються на 1.

Таким чином відповідь єдина.

11. Простими перетвореннями маємо:

$$x^2y^2(x^2 + y^2) - 9(x^2 + y^2) = 9(9 - x^2y^2) \qquad \Rightarrow$$

$$(x^2y^2 - 9)(x^2 + y^2) = 9(9 - x^2y^2).$$

Таким чинмо повинна виконуватись принаймні одна з двох умов: $x^2+y^2 = -9$ або $x^2y^2-9 = 0$. Звідси зрозуміло, що $x^2y^2 = 9$ або $xy = \pm 3$.

12. Нехай $\angle CMD = 150°$ та $\triangle CDM$ рівнобедрений (рис.711), тоді $\angle MCD = \angle MDC = 15°$. Побудуємо рівносторонній $\triangle ABK$, тоді $AB = BK = BD$, тобто $\triangle DBK$ рівнобедрений, тому $\angle KBD = 30° \Rightarrow \angle BDK = 75° \Rightarrow \angle CDK = 15°$, аналогічно $\angle KCD = 15°$, звідки $\triangle CMD = \triangle CKD$ та точки K і M співпадають. Таким чином кути можна легко обчислити на правому рисунку: $(60°, 60°, 60°)$, $(75°, 75°, 30°)$ та $(75°, 75°, 30°)$.

13. Достатньо роз'єднати 2 ланки, наприклад 4-ту та 11-ту. Далі легко переконатись, що будь-яку вагу можна набрати.

14. Відразу зрозуміло, що $E = 8$, а T – непарне число, далі простим перебором знаходимо шукану відповідь: $9 : 8 = 1,125$.

15. Позначимо через x відстань, яку Андрій йде пішки, тоді зрозуміло, що цю відстань Олеся повинна їхати на велосипеді, так само відстань $40-x$ Андрій повинен їхати, а Олеся йти пішки. Легко показати, що час буде мінімальний, коли час у дорозі Андрія та Олесі співпадає. Тому можемо записати таку рівність:

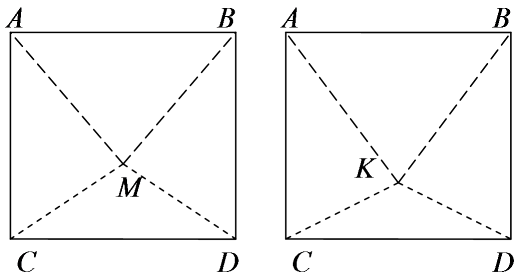

Рис.711

$$\frac{x}{6} + \frac{40-x}{20} = \frac{40-x}{4} + \frac{x}{30}.$$

Звідси випливає, що $x = 24$, далі знаходимо шуканий час – $4 + \frac{16}{20}$ годин, що у хвилинах складає 288 хвилин.

16. Якщо все визначити через кут B, то послідовно будемо мати (рис.712): $\angle A = 90° - \angle B$, $\angle ACL = 45°$, $\angle ALC = 45° + \angle B$, $\angle CLB = 135° - \angle B$, $\angle MCB = \angle B$, $\angle BMC = 180° - 2\angle B$, $\angle CML = 2\angle B$, $\angle A = 90° - \angle B$, $\angle LCM = 45° - \angle B = 2\angle B \Rightarrow \angle B = 15°$.

17. Будемо послідовно заповнювати таблицю, виходячи з умов задачі (рис.713). Відразу заводнюємо результати учасника Б. Він загалом набрав 2 очки, останній учасник міг набрати не більше $1\frac{1}{2}$ очки, тобто останнім не міг бути ні А, ні Б, ні В, ні Д, тобто останній – це учасник Г, тому відомо, що Г виграв у В. Таким чином Г набрав вже $1\frac{1}{2}$ очки, і оскільки він останній, то інші партії він програв.

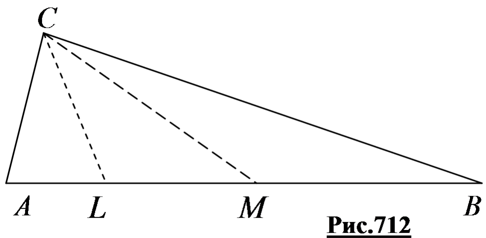

Рис.712

Шахіст В, щоб не бути останнім повинен набрати мінімум півтори очки у партіях з А та Д, бо інакше не набере більше останнього учасника. Тому А у нього виграти не міг, тому дві перемоги А над Г і Д. Таким чином В і Д зіграли у нічию, і В виграв у А. Тобто остаточно А набрав $2\frac{1}{2}$ очки, Б, В і Д набрали по 2 очки і Г – $1\frac{1}{2}$ очки.

	А	Б	В	Г	Д	Рез
А	Ж	½	0	1	1	2½
Б	½	Ж	½	½	½	2
В	1	½	Ж	0	½	2
Г	0	½	1	Ж	0	1½
Д	0	½	½	1	Ж	2

Рис.713

18. Вони могли разом заспівати від 12 до 16 пісень. Оскільки кожна пісня виконувалась рівно трьома з них, то сумарна кількість виходів повинна ділитись на 3, таким чином умову задовольняє лише 13 або 16 пісень, тобто або вони обидві співали по 8 пісень, або одна 6, інша – 7.

19. Нехай спочатку було x туристів та k автобусів. Тоді $x = 22k+1$, тому далі туристів розмістили по $\frac{22k+1}{k-1}$. Оскільки це число дорівнює $22 + \frac{23}{k-1}$, то $k-1 = 23$ та $x = 529$.

20. Швидкість хвилинної стрілки 6. а годинникової - 0,5, які вимірюються у градусах за хвилину. Якщо вважати нульовим кут на число 12, то рівно о 7-й годині годинникова стрілка утворює кут 210°, а хвилинна – 0°. За 38 хвилин годинникова стрілка ще повернеться на 19°, а хвилинна – на 228°, таким чином між ними рівно $229° - 228° = 1°$.

Середня ліга. Вихідний рубіж

1. Першу цифру можна обрати 2 способами. На другому та третьому місці може стояти будь-яка з 10 цифр, а остання четверта цифра однозначно визначається попередніми 3. Отже, всього 200 варіантів.

2. Оскільки $\overline{abc} + \overline{ab} + a \le 1107$, та $2^{\overline{xy}} \ge 2^{10} = 1024$, тобто $a = 9$, $x = 1, y = 0$. Зрозуміло, що $2^{11} > 2000$. Таким чином для знаходження інших змінних ми маємо таку рівність: $11b + c = 25 + 2^z$, з якої простим перебором по z знаходимо, що існує рівно 7 різних розв'язків.

3. Задача № 3 молодша ліга вихідний рубіж.
4. Відстань від центра кола до сторони квадрату – $\sqrt{2}$. Відстань від центра кола до сторони стрикутника – 1 (рис.714), тому шукана відстань - це різниця $\sqrt{2}-1$.

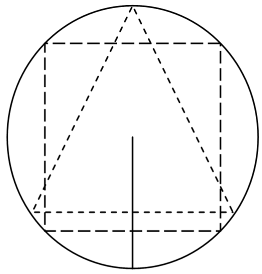

Рис.714

5. Задача № 5 молодша ліга вихідний рубіж.
6. Зробимо такі перетворення: $n^2 = x^2 - 7x + 10 = \frac{(2x-7)^2-9}{4} \Rightarrow (2x-7)^2 - 4n^2 = 9 \Rightarrow (2x-7-2n)(2x-7+2n) = 9$. Далі переглянемо усі розклади числа 9 на прості множники одержимо такі відповіді: $x \in \{1, 2, 5, 6\}$.

7. Віднімемо з другого та третього рівняння перше одержимо, що $(y-x)(1-z) = 0$ та $(z-x)(1-y) = 0$. Таким чином треба розглянути випадки.

$x = y = z \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0$, звідки знаходимо такі два розв'язки: $(-3, -3, -3)$ та $(2, 2, 2)$.

$x = y = 1 \Rightarrow z = 5$, внаслідок симетрії маємо ще такі 3 розв'язки: $(1, 1, 5)$, $(1, 5, 1)$, $(5, 1, 1)$.

8. Кути при вершинах A та D рівні 40 градусів, тому при вершинах B, C – 140 (рис.715). Трикутники ABC, DCB – рівнобедрені, отже їх гострі кути рівні 20 градусів. А це означає, що кут AOD рівний 140 градусів.

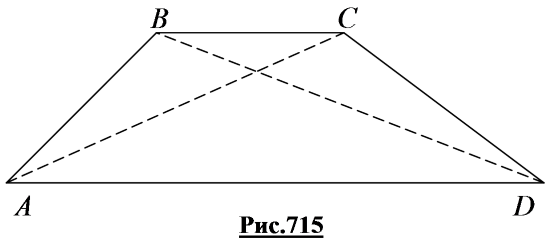

Рис.715

9. Задача № 9 молодша ліга вихідний рубіж.
10. Задача № 10 молодша ліга вихідний рубіж.
11. Задача № 11 молодша ліга вихідний рубіж.
12. Задача № 12 молодша ліга вихідний рубіж.

13. З умов задачі випливає, що усі брехуни сидять парами, зрозуміло, що ті 12, хто сказав про одного сусіда брехуна – лицарі, бо сказали правду. І вони повинні сидіти парами, оскільки рівно 1 їх сусід лицар. Цим 6 парам лицарів відповідає 6 пар брехунів, бо їх один сусід брехун, а брехуни сидять парами. Залишається 6 учасників, серед яких парна кількість брехунів. Лицарі, що залишилися повинні мати обох сусідів брехунами. Якщо перебрати відповідні випадки одержимо, що брехунів рівно 16.

14. Задача № 14 молодша ліга вихідний рубіж.

15. Задача № 15 молодша ліга вихідний рубіж.

16. У позначеннях, що показані на рис.716 можемо записати: $S_{ABC} = S_{DBC} = S_2 + S_3 = S_2 + S_4$, звідки $S_3 = S_4$, крім того, $S_3 S_4 = S_1 S_2$, тому

$$S_{ABCD} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = S_1 + S_2 + 2\sqrt{S_1 S_2} = \left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}\right)^2.$$

17. Якщо кількість камінців є степенем двійки, то виграє другий гравець за таким правилом. Він бере кількість камінців, що дорівнює найбільшій степені 2, на яку ділиться попередній хід супротивника. Якщо кількість камінців не є степенем 2, то достатньо першому гравцю своїм першим ходом зробити кількість камінців, що дорівнює степені двійки. Таким чином відповідь $2^{11} = 2048$.

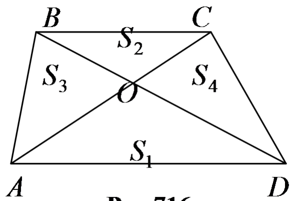

Рис.716

18. Задача № 18 молодша ліга вихідний рубіж.

19. Позначимо через $a_n = \underbrace{\sqrt{1996 + \sqrt{1996 + \ldots \sqrt{1996}}}}_{\text{n чисел}}$. Тоді $44 < \sqrt{1996} = a_1 < 45 \Rightarrow [a_1] = 44$.

Далі маємо $45^2 < 2040 < 1996 + \sqrt{1996} < 2041 < 46^2 \Rightarrow [a_2] = 45$.

Нехай для деякого $n > 1$ $[a_n] = 45$, тоді $a_{n+1} = \sqrt{1996 + a_n}$ та $45 < \sqrt{2041} < a_{n+1} < \sqrt{2042} < 46$, тому $[a_{n+1}] = 45 \Rightarrow [a_{2010}] = 45$.

20. Позначимо відрізки як на рис.717, тоді додамо відрізки по вертикалі і одержимо рівність для знаходження x:

$$\frac{7}{\sqrt{2}}+4+\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{6}{\sqrt{2}}+2+\frac{x}{\sqrt{2}},$$

тому $x=2\sqrt{2}+3$. Далі аналогічно додамо усе по вертикалі і одержимо, що

$$\frac{7}{\sqrt{2}}+y+\frac{x}{\sqrt{2}}=\frac{6}{\sqrt{2}}+5+\frac{2}{\sqrt{2}},$$

звідки $y=3-\sqrt{2}$.

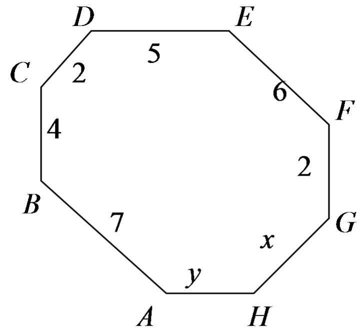

Рис.717

Середня ліга. Заліковий рубіж

1. Для виграшу трьох партій Олесі потрібно в наступних 4 партіях виграти принаймні двічі. Є 16 рівноймовірних варіантів результатів 4 партій. Серед них один – в усіх чотирьох перемога Андрія, та ще 4 варіанти – 3 перемоги Андрія та 1 – Олесі. А решта – такі, в яких 3 раунди виграє Олеся. Тобто відповідь – $\frac{11}{16}$

2. З рівності $5(4n+1)-4(5n-1)=9$ ми маємо, що НСД $(4n+1,5n-1)$ ділить 9, тобто це є число 1, 3 або 9. Оскільки $p^2q=(4n+1)(5n-1)$, то можна розглянути два випадки.

1) Якщо цей НОД не 1, тобто обидва числа $(4n+1)$ та $(5n-1)$ кратні 3, тоді єдина можливість для простих p,q – це $p=3,q=1$, що також суперечить простоті шуканих чисел.

2) НОД дорівнює 1, тобто вони взаємно прості, при $n>2$ маємо $4n+1<5n-1$, за умовою – $q<p^2$, тому $4n+1=q$, $5n-1=p^2 \Rightarrow 8=p^2-q=n-2 \Rightarrow n=10$, далі просто знаходимо $p=7,q=41$.

3. Ці числа повинні задовольняти таке квадратне рівняння: $t^2-10t+26=0$, але його дискримінант від'ємний. Тому таких дійсних чисел не існує.

4. Позначимо як на рис.718 центр кола та середину відрізку AP через O та C відповідно. Оскільки $PN \parallel OA$, то $\angle APN=\angle PAO$. $\triangle PAO$ рівнобедрений, тому $\triangle CAO$ прямокутний, звідки $\triangle CAO \sim \triangle PAN$ $\Rightarrow \frac{PA}{PN}=\frac{OA}{AC} \Rightarrow \frac{10}{6}=\frac{r}{5} \Rightarrow r=\frac{25}{3}$.

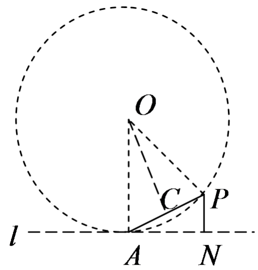

Рис.718

5. Задача № 5 молодша ліга заліковий рубіж.

6. Зрозуміло, що для довільного натурального n виконується конгруенція: $n^2\equiv(d(n))^2\equiv(d(n))^4 \pmod 4$. Звідси маємо, що $d(b)=2$. Тепер підставимо це значення у рівність, крім того, нехай $a=d(a)\cdot A$, $b=d(b)\cdot B$, тоді маємо $(d(a))^2(A^2-1)=4(12-B^2)$.

Зліва невід'ємне число, а справа воно стає додатним лише при $B\in\{1,2,3\}$.

$B=1\Rightarrow(d(a))^2(A^2-1)=44\Rightarrow A^2-1=11$ – розв'язків немає.
$B=2\Rightarrow(d(a))^2(A^2-1)=32\Rightarrow A^2-1=8\Rightarrow A=3$ і маємо перший розв'язок: $a=6,b=4$.
$B=3\Rightarrow(d(a))^2(A^2-1)=12\Rightarrow A^2-1=3\Rightarrow A=2$ і маємо другий розв'язок: $a=4,b=6$.

7. Оскільки $c\ge b$, $e\ge d$, то $2(a+c+e)\ge(a+b+c+d+e)=100$, тобто значення виразу не може бути меншим від 50. А при $a=b=c=0,d=e=50$ це значення досягається, тому воно шукане.

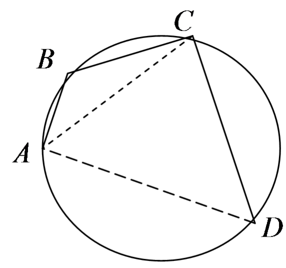

Рис.719

8. З умов задачі випливає, що $\angle ABC=120°$, тому за теоремою косинусів (рис.719)

$$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos 120°=7,$$

таким чином з теореми косинусів для трикутника ACD маємо $9+x^2-3x=7$, де $x=AD$, звідки $x=1$ або $x=2$.

9. Задача № 9 молодша ліга заліковий рубіж.

10. Задача № 10 молодша ліга заліковий рубіж.

11. Задача № 11 молодша ліга заліковий рубіж.

12. Позначимо сторону $BC = a$ та запишемо теорему косинусів для $\triangle ABC$ (рис.720).

$$63 = 9 + a^2 - 3a,$$

це рівняння для третьої сторони має єдиний додатний корінь, звідки знаходимо, що $a = 9$. Тепер запишемо теореми косинусів для трикутників ACD та DCB, при цьому використаємо умову $AD = DB$ та позначимо $CD = l$.

$$9 + l^2 - 3\sqrt{3}l = 81 + l^2 - 9\sqrt{3}l \quad \Rightarrow \quad l = 4\sqrt{3}.$$

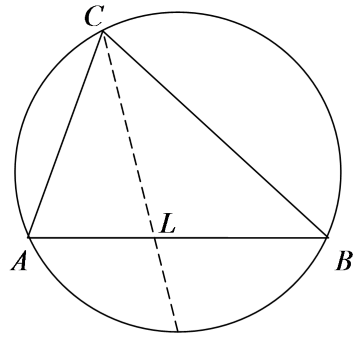

Рис.720

13. Нехай $x = 4a - b, y = 4b - a$, тоді $xy > 0$, $x + y = 3(a + b) > 0$, x, y – натуральні. Звідси знаходимо, що $a = \frac{4x+y}{15}$, $b = \frac{4y+x}{15}$. Отже, $4x+y$ та $4y+x$ діляться на 15. Оскільки xy ділиться на 15, то одне з чисел ділиться на 3. Тоді з того, що $4x+y$ та $4y+x$ діляться на 15, маємо, що інше число теж ділиться на 3. Аналогічно обидва числа діляться на 5. Отже, маємо: x, y діляться націло на 15, $xy = 2010^n$. Оскільки a, b, y однозначно визначаються по x, то знайдемо кількість можливих x.

Оскільки $2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$, то $x = 2^u \cdot 3^v \cdot 5^c \cdot 67^d$, де $0 < u, d < n$, $1 \leq v, c \leq n - 1$. Отже, загальна кількість становить $(n + 1)^2 \cdot (n - 1)^2 = (n^2 - 1)^2$.

14. Серед множників чисел при їх розкладі на прості множники є $24 = 2^3 \cdot 3$. За формулою кількості дільників $18 = (x_1 + 1) \ldots (x_n + 1)$ та $12 = (y_1 + 1) \ldots (y_m + 1)$. Для числа x маємо $18 = 2 \cdot 9 = 3 \cdot 6$ – тут один з множників повинен бути не менше від 4, бо є дільник 2^3, який у кількості дільників дає множник не менший від 4. Таким чином можливі варіанти: $x = 2^8 \cdot 3$ або $x = 2^5 \cdot 3^2$. Аналогічно для числа y маємо $12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$, звідки варіанти для y такі: $y = 2^5 \cdot 3$ або $y = 2^3 \cdot 3^2$. З цих варіантів лише числа $x = 2^8 \cdot 3$ та $y = 2^3 \cdot 3^2$ мають НСД рівним 24, тому їх НСК дорівнює $2^8 \cdot 3^2 = 2304$.

15. Задача № 15 молодша ліга заліковий рубіж.

16. Використаємо відношення площ (рис.721).

$$\frac{S_{HBC}}{S_{ABC}} = \frac{HA_1}{AA_1} = \frac{1}{3}.$$

$$\frac{S_{HAC}}{S_{ABC}} = \frac{HB_1}{BB_1} = \frac{1}{2}.$$

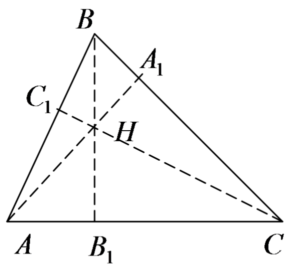

Рис.721

Звідси випливає, що

$$\frac{S_{HBA}}{S_{ABC}} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} = \frac{HC_1}{CC_1}.$$

Тому шукане відношення 5 : 1.

17. Задача № 17 молодша ліга заліковий рубіж.

18. Нехай сьогодні n-тий день з року. Тоді $n - 1$ ділиться на 11. Запишемо $n = 11k + 1$. Крім того, $n - 2 = 11k - 1 = 10k + k - 1$ ділиться на 5. Тобто $k = 5l + 1$, $n = 11(5l + 1) + 1 = 55l + 12$. Далі, $n - 3 = 55l + 9 = 56l + 7 - (l - 2)$ ділиться на 7, тобто $l - 2$ ділиться на 7. Отже, $l = 7m + 2$ для деякого цілого m. $n = 55(7m + 2) + 12$. $m = 0$, адже більше значення дасть нам n більше 365. Отже $n = 122 = 31 + 28 + 31 + 30 + 2$, а це значить, що сьогодні 2 травня.

19. З другої рівності маємо, що $xy^3 + 5x^3 = x$, тепер розглянемо різницю одержаної рівності та першої заданої рівності: $x(x^3 - y^3) = y - x$. Далі все випливає з скорочення на $x - y \neq 0$.

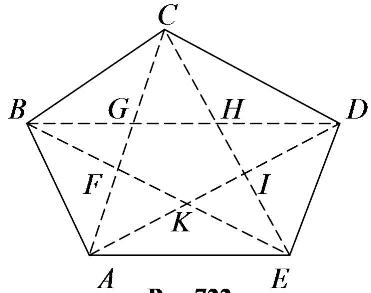

Рис.722

20. Покажемо, що усі відношення однакові та знайдемо це відношення. Позначимо відповідні точки перетину діагоналей як на рис.722. Внаслідок заданої паралельності утворилося 10 паралелограмів. Тоді, наприклад, $KB = CD = EF$, $\triangle FBG \sim \triangle EBD$, тому $\frac{FG}{DE} = \frac{FB}{BE} = \frac{GB}{BD} \Rightarrow FB = BE - EF = BE - CD$, $BG = BD - DG = BD - AE$, тобто $\frac{BE}{CD} = \frac{BD}{AE}$, тому ці відношення усі рівні. Знайдемо його.
Позначимо його через k. $FG = 2DE - AC$, з подібності $\triangle FBG \sim \triangle EBD$ маємо, що: $2 - k = 1 - \frac{1}{k} \Rightarrow k = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Старша ліга. Вихідний рубіж

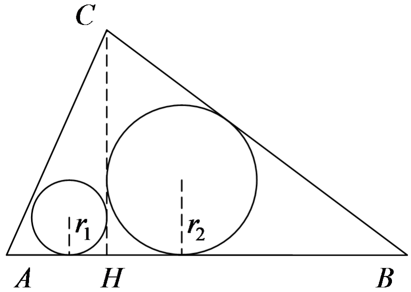

Рис.723

1. Задача № 1 середня ліга вихідний рубіж.
2. Задача № 2 середня ліга вихідний рубіж.
3. Задача № 3 молодша ліга вихідний рубіж.
4. Оскільки $\triangle ABC \sim \triangle ACH \sim \triangle BCH$ (рис.723), то $r : r_1 : r_2 = AB : AC : BC$, тобто трикутник зі сторонами r, r_1, r_2 існує і він подібний до $\triangle ABC$. Таким чином, нам достатньо знайти найменший кут $\triangle ABC$.
З відомої формули для радіуса вписаного кола у прямокутний трикутник через сторони можемо записати, що

$$P = r + r_1 + r_2 = \frac{1}{2}((AC + BC - AB) + (AH + CH - AC) + (BH + CH - BC)) = CH = \frac{1}{4}AB.$$

Далі просто з тригонометричних співвідношень знаходимо, що

$$CH = AB \sin\angle A \cos\angle A = AB\frac{1}{2}\sin 2\angle A \quad \Rightarrow \quad \sin 2\angle A = \frac{1}{2} \Rightarrow 2\angle A = 30^\circ \Rightarrow \angle A = 15^\circ,$$

зрозуміло, що це і є шуканий найменший кут трикутника.

5. Покажемо, що можна перефарбувати у чорний колір усі клітини, за виключенням однієї діагоналі. Для цього вибираємо по дві вершини, що симетричні цій діагоналі та дві вершини на самій діагоналі і перефарбовуємо ті, що не на діагоналі. Зрозуміло, що таким чином можна пофарбувати у чорний колір усі клітини, крім зазначеної діагоналі. Таким чином можна пофарбувати 110 клітин з 121.

Більшої кількості пофарбувати не вдасться, оскільки при кожному фарбуванні у кожній горизонталі повинна залишитись принаймні одна біла клітина.

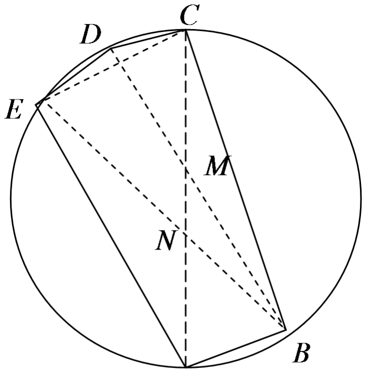

Рис.724

6. Максимум може бути 99 таких майже простих чисел поспіль. Як приклад - 100001 та 100099, оскільки вони обидва знаходяться у проміжку між $1000 \cdot 100$ та $1001 \cdot 100 < 1000 \cdot 101$, а тому не може бути добутком трицифрового та чотирицифрового чисел. Бути їх більше 99 не може, оскільки серед будь-яких 100 чисел поспіль є число, яке закінчується на 00, а тому воно є добутком 100 на деяке чотирицифрове число.
7. Якщо зробити перетворення заданого виразу, одержимо, що $\frac{x_1+x_2}{(x_1+1)(x_2-1)} = -(x_1+x_2)$, звідси знаходимо перше значення a, що задовольняє умови: $x_1 + x_2 = -(a+2) = 0$.
Інакше, $x_1x_2 + x_2 - x_1 - 1 = -1$, якщо тепер скористатись формулою коренів квадратного рівняння маємо, що $a - 1 = \pm\sqrt{D}$, звідки й знаходимо друге значення a: $(a-1)^2 = (a+2)^2 - 4(a-1) \Rightarrow a = -\frac{7}{2}$.

Перевіркою неважко переконатись, що при обох значення параметру корені існують.

8. Нехай $AC = d$, $\angle ACB = \angle AEB = \alpha$, $\angle BEC = \angle BDC = 90^\circ - \alpha$, $x = \frac{AB}{BC} = \operatorname{tg}\alpha \Rightarrow \frac{AN}{CN} = \frac{S_{ANE}}{S_{CNE}} = \frac{AE \cdot NE \cdot \sin\alpha}{CE \cdot NE \cdot \sin(90^\circ - \alpha)} = 2x$, оскільки $AN + NC = d$ знаходимо, що $AN = \frac{2x}{2x+1}d$

(рис.724). Аналогічно знаходимо, що $AM = \frac{10x}{10x+1}d \Rightarrow MC = \frac{1}{10x+1}d \Rightarrow MN = AM - AN == \frac{8x}{(2x+1)(10x+1)}d$. З умови, що вказані відрізки утворюють арифметичну прогресію, маємо, що $AN + MC = 2MN \Rightarrow$

$$\frac{2x}{2x+1} + \frac{1}{10x+1} = \frac{16x}{(2x+1)(10x+1)}$$

звідки остаточно знаходимо відповіді: $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{10}$.

9. Першу цифру можна вибрати 4 способами, останню – п'ятьма, інші – по 10 варіантів, тобто разом 2000 таких чисел, далі виписуємо усі чотирицифрові числа, які кратні 998 і знаходимо, що серед них рівно 4 мають парні першу та останню цифру. Таким чином шукане число чисел 1996.

10.

$$9 + 99 + 999 + \ldots \underbrace{99\ldots9}_{1964} =$$

$$= (10 - 1) + (100 - 1) + \ldots + 10^{1964} - 1 = 10(1 + 10 + \ldots 10^{1963}) - 1964 =$$

$$= \underbrace{11\ldots1}_{1964}0 - 1964 = \underbrace{11\ldots1}_{1960}11110 - 1964 = \underbrace{11\ldots1}_{1960}09146.$$

Таким чином число містить 1961 одиницю.

11. Якщо від першого рівняння відняти друге, помножене на 8, будемо мати таку рівність: $(x-2)^4 = (y-4)^4$, звідки маємо два варіанти $y = x + 2$ або $y = 6 - x$.

Якщо підставити перший випадок, то ми одержимо рівняння $x^3 + 3x^2 + 4x + 32 = 0$, яке має єдиний дійсний корінь $x = -4$, звідки $y = -2$.

Якщо підставити другий випадок, то ми одержимо рівняння $x^3 - 9x^2 + 36x - 64 = 0$, яке має єдиний дійсний корінь $x = 4$, звідки $y = 2$.

Таким чином система має два наведених розв'язки.

12. Якщо скласти цю розгортку, то вийде куб зі стороною 2, від якого відрізали піраміду зі стороною 1 (рис.725). Оскільки ця піраміда має 3 перпендикулярні сторони довжиною 1, то ми одержимо, що її основа – прямокутний трикутник зі стороною 1, висота також 1, тому її об'єм дорівнює $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{6}$. Таким чином загальний об'єм шуканого багатогранника це $2^3 - \frac{1}{6} = \frac{47}{6}$.

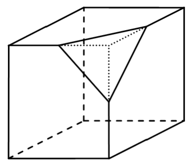

Рис.725

13. Задача № 13 середня ліга вихідний рубіж.

14. Задане рівняння можна переписати у такому вигляді: $(x+y)^2 + (y+1)^2 = 1989$. Оскільки права частина кратна 3, то легко зрозуміти, що й кожний з квадратів повинен бути кратний 3, тому нехай $x + y = 3k$, $y + 1 = 3l$, $k \geq l \Rightarrow k^2 + l^2 = 221$. Оскільки k більше з двох чисел, то воно повинно лежати в межах $\frac{221}{2} \leq k^2 \leq 221$, звідки для k^2 достатньо розглянути такі значення – 121, 144, 169, 196. Далі просто знаходимо можливі варіанти $k = 11$, $l = 10$, та $k = 14$, $l = 5$, звідки остаточно знаходимо розв'язки цього рівняння в натуральних числах: $x = 28, y = 14$ та $x = 4, y = 29$.

15. Підставимо у рівність $x = \frac{1}{y}$, одержимо

$$f\left(\frac{1}{y}\right) - f(y) = f^2\left(\frac{1}{y}\right) - f^2(y).$$

Виберемо таке значення y, при якому $f(y) = \frac{1}{2}$, тоді одержимо рівність: $\left(f\left(\frac{1}{y}\right) - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$, таким чином $f\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{2}$. Тепер покладемо $x = -1$ та $f(y) = \frac{1}{2}$ і одержимо таку рівність:

$$f(-1) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}f(-1) - \frac{1}{2}f(-1).$$

Звідки одержуємо, що $f(-1) = \frac{1}{2}$. Шукана функція існує, наприклад, стала.

16. Помножимо цю рівність на $(a+b+c)(a+c)(b+c)$ і одержимо, що $c^2 = a^2 + b^2 - ab$, звідки з теореми косинусів одержимо, що $\cos\angle C = \frac{1}{2}$, тобто $\angle C = 60°$.

17. Задача № 17 середня ліга вихідний рубіж.

18. Позначимо число $m = \overline{a_1a_2\dots a_{n-1}6} = 10x + 6$. Тоді виконується така рівність: $4(10x+6) = 6\cdot 10^{n-1} + x$ або $13x = 2(10^{n-1} - 4)$. Таким чином число у правій частині повинно ділитись на 13, найменше значення n, при якому це відбувається – $n = 6$. Число буде 99996, тому $x = 15384$ та шукане число $m = 153846$.

19. Послідовно знаходимо, що

$$a_2 = a_1 + a_1 + 1 = 3,$$

$$a_3 = a_2 + a_1 + 2 = 6,$$

$$a_4 = a_2 + a_2 + 4 = 10 = a_3 + a_1 + 3.$$

Зробимо припущення, що $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$ та ММІ це доведемо. Якщо це твердження виконується для усіх $k \le n$, то для $n+1 = l+m$, $l \le n$, $m \le n$ маємо:

$$a_{n+1} = a_{l+m} = a_l + a_m + ml = \frac{l(l+1)}{2} + \frac{m(m+1)}{2} + lm = \frac{(l+m)(l+m+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

що й треба було довести. Таким чином єдина послідовність, що задовольняє умови – це $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

20. Задача № 20 середня ліга вихідний рубіж.

Старша ліга. Заліковий рубіж

1. Занумеруємо кульки номерами від 1 до 10. Тоді першу кульку можно витягнути 10 способами. Другу – 9, а третю – 8. Отже, всього $10\cdot 9\cdot 8$ варіантів. Нехай у нас всього x, y, z кульок блакитного, червоного та жовтого кольорів. Тоді є x варіантів витягнути блакитну кульку, y – червону та z жовту кульку. Оскільки порядок не має значення, то потрібно ще домножити на 6 (кількість впорядкувань). Отже, $\frac{6xyz}{10\cdot 9\cdot 8} = \frac{3}{10}$. Отже, $xyz = 36$, $x+y+z = 10$. Оскільки z – найбільше та є дільником 36, то r дорівнює 4, 6 або 9. Але лише для $z = 4$ можна знайти x, y. Отже, всього 4 кульки жовтого кольору. Далі просто знаходимо, що блакитних та червоних повинно бути по 3.

2. Задача № 2 середня ліга заліковий рубіж.

3. Задача № 3 середня ліга заліковий рубіж.

4. Покажемо, що чотирикутник $KLMN$ – вписаний (рис.726). В чотирикутнику $LCOB$ маємо $\angle BLO = \angle BCO = \frac{1}{2}\angle C$, $\angle CLO = \angle CBO = \frac{1}{2}\angle B$, в чотирикутнику $NDOA$ маємо $\angle DNO = \angle DAO = \frac{1}{2}\angle A$, $\angle ANO = \angle ADO = \frac{1}{2}\angle D \Rightarrow \angle L + \angle N = 180° \Rightarrow LO\cdot NO = KO\cdot MO \Rightarrow NO = \frac{pr}{q}$.

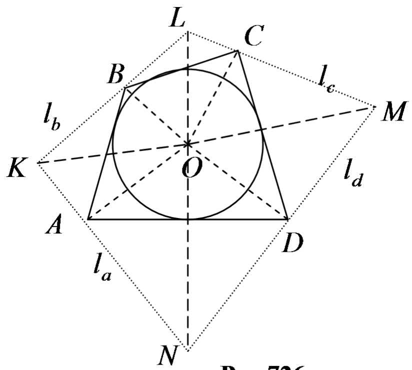

Рис.726

5. Задача № 5 молодша ліга заліковий рубіж.

6. Задача № 6 середня ліга заліковий рубіж.

7. З теореми Вієта можемо записати такі рівності: $a+b+c = -ab$, $ab+bc+ca = bc$, $abc = -ca$.

Далі просто розглянемо випадки, які випливають з двох останніх рівностей, які для зручності можна записати таким чином: $a(b+c) = 0$ та $ac(b+1) = 0$.

Якщо $a = 0$, то $b = -c$ і простою перевіркою переконуємось, що трійка $(0, b, -b)$, де $b \ne 0$ є розв'язком.

Якщо $a \ne 0$, то маємо, що $b \ne 0, c \ne 0$, бо інакше $b = c$. А тоді повинна виконуватись одночасно дві умови: $b+c = 0$ та $b+1 = 0$, звідки маємо, що $b = -1$ $c = 1$ і при довільному $a \ne 0$ маємо другий розв'язок: $(a, -1, 1)$.

8. Позначимо відношення $\frac{CM}{CD} = x$, далі за допомогою векторів маємо (рис.727): $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM} = (1-x)\overrightarrow{AC} + \frac{x}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. Внаслідок колінеарності векторів $\overrightarrow{AM}$ та $\overrightarrow{AE}$ маємо таке відношення $\frac{1-x}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{x}{3}}{\frac{2}{3}}$. Звідси й знаходимо, що $x = \frac{6}{7}$. Далі маємо:

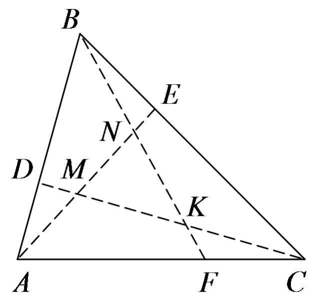

Рис.727

$$\frac{S_{AMC}}{S_{ADC}} = \frac{CM}{CD} = \frac{6}{7} \qquad \Rightarrow \frac{S_{ADC}}{S_{ABC}} = \frac{AD}{AB} = \frac{1}{3}.$$

Тому $S_{AMC} = \frac{2}{7}S_{ABC}$, аналогічно $S_{ANB} = S_{BKC} = \frac{2}{7}S_{ABC}$ звідки маємо шукану відповідь $S_{MNK} = \frac{1}{7}S_{ABC}$.

9. Неважко показати методом від супротивного, що будь-який прямокутник розміром 1×3 містить рівно 1 синю клітину. Дійсно, якщо він містить 2 сині клітини (аналогічно, якщо не містить синіх клітин взагалі), то прямокутники розміром 1×3 над ним та під ним синіх клітин не містять. Але тоді по іншому орієнтований прямокутник містить рівно 1 синю клітину – суперечність (рис.728). Прямокутник розміром 19×88 можна розрізати на 18×88 та 1×88. Перший містить 264 прямокутники 2×3, який містить 528 синіх клітин. Прямокутник 1×88 можна розбити на 29 прямокутників 1×3 та ще одна клітина. Таким чином він містить 557 або 558 синіх клітин. Шукане розфарбування очевидно існує, для цього достатньо пофарбувати кожну третю діагональ одного напряму.

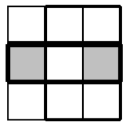
Рис.728

10. З рівняння випливає, що $2\sqrt{xy} = 1976 - x - y$, звідки випливає, що $\sqrt{xy}$ – також ціле число. Помножимо вихідне рівняння на $\sqrt{x}$ і одержимо, що $\sqrt{1976x} = x + \sqrt{xy}$, тому $\sqrt{1976x}$ – ціле, оскільки $1976 = 2^3\cdot13\cdot19$, то x повинно ділитись на $494 = 2\cdot13\cdot19$, позначимо $x = 494x_1$, аналогічно $y = 494y_1$, звідки $\sqrt{x_1} + \sqrt{y_1} = 2$, тому $x_1 = y_1 = 1 \Rightarrow x = y = 494$.

Зрозуміло, що усі ці міркування справджуються у випадку $x, y \neq 0$, оскільки з умов задачі обидві невідомі невід'ємні, то залишається розглянути випадок $x = 0$ або $y = 0$. Тоді очевидно, що маємо ще 2 розв'язки: $(1976, 0)$ та $(0, 1976)$.

11. Нехай $b_n = \frac{1}{a_n}$, тоді $b_1 = \frac{1}{2}$, $b_2 = 1$, $b_{n+1} = 2b_n - b_{n-1}$, звідки просто знайти, що $b_n = \frac{n}{2}$ $\Rightarrow a_n = \frac{2}{n} \to 0$ при $n \to \infty$.

12. Задача № 12 середня ліга заліковий рубіж.

13. Задача № 13 середня ліга заліковий рубіж.

14. Задача № 14 середня ліга заліковий рубіж.

15. Нехай усі числа по модулю дорівнюють 1, тоді, якщо кількість додатних та від'ємних подвійних добутків співпадають, то має місце рівність:

$$(a_1 + a_2 \ldots + a_n)^2 = a_1^2 + a_2^2 + \ldots a_n^2 = n,$$

а це зрозуміло, що це можливо лише у випадку, коли $n > 1$ – повний квадрат.

Для остаточного розв'язання задачі треба навести приклад, що при усіх $n = k^2 > 1$ це можливо. Оскільки

$$(a_1 + a_2 \ldots + a_{k^2})^2 = a_1^2 + a_2^2 + \ldots a_{k^2}^2 = k^2,$$

то

$$a_1 + a_2 \ldots + a_{k^2} = k,$$

тому достатньо вибрати в якості $''+1''$ перші $\frac{1}{2}(k^2+k)$ змінних, а решту – $\frac{1}{2}(k^2-k)$ змінних обрати рівними $''-1''$.

16. Нехай точка F обрана на промені DC таким чином, щоб $CF = BA$ (рис.729). Тоді оскільки

$$\angle ABD = \angle CAD + \angle ADC = 180^\circ - \angle ACD = \angle ACF,$$

то $\triangle DBA = \triangle ACF \Rightarrow AD = AF$ та $\angle FAC = \angle ADB = \angle BAC$, тому точка F лежить на прямій AB та $\angle BAD = \angle AFC \Rightarrow AD = DF \Rightarrow \triangle ADF$ рівносторонній, тому $\angle BAD = 60°$.

17. Обчислимо цю суму по розрядах. На першій позиції (розряд тисяч) можуть стояти цифри 1, 2, 3, 4, 5, при будь-якій фіксованій цифрі решта розрядів можуть бути заповнені $6 \cdot 6 \cdot 3$ способами, тому сума у розряді тисяч складає

$$(1+2+3+4+5) \cdot 6 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 10^3 = 1620000.$$

Аналогічні підрахунки у інших розрядах дають такі відповіді:

$$(0+1+2+3+4+5) \cdot 5 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 10^2 = 135000.$$

$$(0+1+2+3+4+5) \cdot 5 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 10^1 = 13500.$$

$$(1+3+5) \cdot 6 \cdot 6 \cdot 5 = 1620.$$

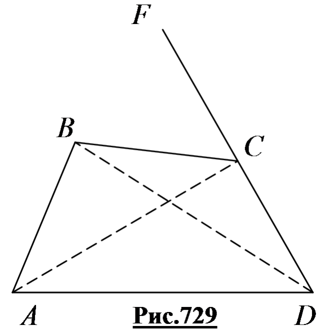

Рис.729

Уся сума дорівнює 1770120.

18. Задача № 18 середня ліга заліковий рубіж.

19. Задача № 19 середня ліга заліковий рубіж.

20. Задача № 20 середня ліга заліковий рубіж.