Геометрія для чотких пацанів-1

Хілько Данило dkhilko@ukr.net

1. В нерівнобедреному трикутнику ABC відмічені середини сторін M_A, M_B, M_C. Нехай S — довільна точка прямої Ейлера трикутника ABC. Прямі SM_A, SM_B, SM_C вдруге перетинають коло дев'яти точок трикутника ABC вдруге в точках X, Y, Z. Доведіть, що AX, BY, CZ перетинаються в одній точці.

2. В трикутнику ABC відмічено інцентр I. Пряма, що проходить через I перпендикулярно AI перетинає AB та AC в B' та C' відповідно. Відмітимо такі точки B'' та C'' на променях BC та CB, що $BB'' = BA$ та $CC'' = CA$. Відмітимо другу точку перетину описаних кіл трикутників $AB'B''$ та $AC'C''$ — T. Доведіть, що центр описаного кола трикутника AIT лежить на стороні BC.

3. Точка D — довільна точка на стороні BC трикутника ABC. I,I_1 та I_2 — інцентри трикутників ABC,ABD та ACD відповідно. $M \neq A$ та $N \neq A$ точки перетину описаного кола трикутника ABC та описаних кіл трикутників IAI_1 та IAI_2 відповідно. Доведіть, що незалежно від вибору точки D пряма MN проходить через фіксовану точку.

4. Нехай ABC — гострокутний трикутник, і нехай X — довільна точка на меншій дузі BC його описаного кола. Відмітимо P та Q — основи перпендикулярів з X до сторін CA та CB відповідно. Нехай R — точка перетину PQ та перпендикуляру з B на AC. Нехай ℓ — пряма, що проходить через P паралельно XR. Доведіть, що всі прямі ℓ проходять через фіксовану точку, яка незалежною від вибору X.

5. Вписане коло трикутника ABC з центром I дотикається до сторони BC в D. Нехай X — точка на дузі BC описаного кола трикутника ABC, така що якщо E, F — проекції X на BI, CI, а M середина EF, то $MB = MC$. Доведіть, що $\angle BAD = \angle CAX$.

6. Дано гострокутний трикутник ABC, в якому кут B більше кута C. Нехай M — середина BC. D та E — основи висот з C та B відповідно. K та L середини ME та MD відповідно. Позначимо точку перетину KL та прямої, що проходить через A паралельно BC через T. Доведіть, що $TA = TM$.

7. M — довільна точка на стороні BC трикутника ABC. ω —коло, яке дотикається до AB та BM в T та K, а такождо описаного кола AMC в P. Доведіть, що якщо $TK \parallel AM$, то описані кола трикутників APT та KPC дотикаються.

8. На висотах AD, BE та CF гострокутного трикутника ABC взято точки X, Y, Z відповідно так, що сума площ трикутників XBC, YCA, ZAB рівна площі трикутника ABC. Доведіть, що описане коло трикутника XYZ проходить через ортоцентр ABC.

9. Дано правильний трикутник ABC і коло ω, що дотикається до AB в точці B, а до AC в точці C. Пряма, що проходить через A, перетинає ω в точках D та E. Нехай O — центр ABC. Доведіть, що B, O та середини відрізків CD та CE лежать на одному колі.

10. Нехай P — довільна точка всередині трикутника ABC. Прямі AP, BP та CP перетинають BC, CA, AB в D, E, F відповідно. Описані кола трикутників BFC та BDA перетинаються вдруге в точці I, описані кола трикутників BEC та CDA перетинаються в точці J. Доведіть, що описане коло трикутника IDJ проходить через середину сторони BC.