Теория чисел, листок 1

1. Натуральное число M делится нацело на $N = 11 \dots 1$ - всего k единиц. Докажите, что сумма цифр числа M не меньше k.

2. Про натуральные числа $a, b, c > 1$ известно, что для любого натурального n найдется такое натуральное число k, что $a^k + b^k = 2c^n$. Докажите, что $a = b$.

3. У натурального числа n ровно k различных простых делителей. Докажите, что найдется натуральное число $a, 1 < a < \frac{n}{k} + 1$, для которого $a(a-1) \vdots n$.

4. Пусть n — натуральное число, $F = 2^{2^n} + 1$. Докажите, что если $n \geq 3$, то у числа F есть простой делитель, больший чем $2^{n+2}(n+1)$.

5. Дан многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами степени не меньше 1. Докажите, что не существует функции $T: Z \to Z$, для которой при любом натуральном n количество решений уравнения $T^n(x) = x$, где $T^n(x) = T(T(\dots T(x) \dots))$ -всего n итераций, равно $P(n)$.

6. Докажите, что уравнение $(2^n - 1)(3^n - 1) = d^2$ не имеет решений в натуральных числах.

7. Для конечного непустого множества простых чисел P обозначим $m(P)$ наибольшее количество последовательных натуральных чисел, каждое из которых кратно хотя бы одному числу из P. Докажите, что

а) $m(P) < (|P| + 1)(2^{|P|} - 1)$

б) Используя комплексные числа, докажите, что $m(P) < 2^{|P|}$

8. Решите в целых числах уравнение $x^2 + 4 = y^3$.

9. Рассмотрим множество унитарных многочленов степени n с коэффициентами из множества $\{1, 2, \dots, n!\}$. Многочлен $f(x)$ из этого множества назовем *простым,* если для любого натурального k в последовательности $f(1), f(2), f(3), \dots$ встретится бесконечно много чисел, взаимно простых с k. Докажите, что *простые* многочлены составляют не больше 75% от размера рассматриваемого множества.

10. Пусть $\pi(n)$ - количество простых чисел, не превосходящих n. Докажите, что для любого натурального $m \geq 2$ существует натуральное число n такое, что $m = \frac{n}{\pi(n)}$.

Запасные задачи:

11. Можно ли найти натуральные числа a и b такие, что a не делит $b^n - n$ ни при каком натуральном n?

12. Дано конечное множество простых чисел P. Докажите, что найдется натуральное число x такое, что оно представляется в виде $x = a^p + b^p$ (с натуральными a, b) тогда и только тогда, когда $p \in P$.

13. Можно ли найти 2013 последовательных натуральных чисел, ни одно из которых не делится на сумму своих цифр?

14. Дан многочлен f с целыми коэффициентами. Про строго возрастающую последовательность натуральных чисел (a_n) известно, что $a_n \leq f(n)$ для любого натурального n. Докажите, что множество простых чисел, делящих хотя бы одно число в этой последовательности, бесконечно.

15. Может ли произведение миллиарда последовательных натуральных чисел быть равно произведению двух миллиардов последовательных натуральных чисел?

16. Для натурального a обозначим через P(a) наибольший простой делитель числа $a^2 + 1$. Докажите, что существует бесконечно много троек различных натуральных чисел a, b, c таких, что P(a) = P(b) = P(c).