7-й Київський турнір математичних боїв імені Лесі Рубльової

Математичний бій № 1

Старша ліга

Група А

Умови та розв'язки

1. Знайти усі функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, які для усіх дійсних x, y задовольняють умову:

$$xf(x + xy) = xf(x) + f(x^2)f(y).$$

<u>Відповідь:</u> $f(x) = 0$ або $f(x) = x$.

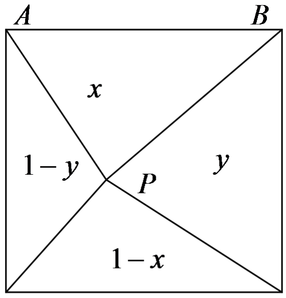
<u>Розв'язання.</u> Зробимо декілька підстановок: $x = y = 0 \Rightarrow 0 = f^2(0)$.
Тепер підставимо $y = -1 \Rightarrow xf(x) + f(x^2)f(-1) = 0$.
Розглянемо два випадки.
1 випадок. $f(-1) = 0 \Rightarrow$ для усіх $x \in \mathbb{R}$ $xf(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0$ – розв'язок.
2 випадок. $f(-1) \neq 0 \Rightarrow$ у співвідношення $xf(x) + f(x^2)f(-1) = 0$ підставимо $x = -1$, після скорочення на $f(-1) \Rightarrow f(1) = 1$. Далі туди ж підставимо $x = 1$ і одержимо $f(-1) = -1$. Тому співвідношення $xf(x) + f(x^2)f(-1) = 0$ приймає вигляд $xf(x) = f(x^2)$. Тепер покладемо $y = x - 1$ у початкову рівність $\Rightarrow xf(x^2) = xf(x) + f(x^2)f(x - 1)$. Підставимо сюди знайдене значення і одержимо, що $f(x^2)(f(x - 1) - (x - 1)) = 0$. Якщо припустити, що $f(a) = 0$ для деякого $a \neq 0$. Тоді із рівності $xf(x) = f(x^2)$ маємо, що також і $f(a^2) = 0$. Тепер підставимо у початкову рівність $x = a$ і ми одержимо, що $af(a + ay) = 0$. Тобто $f(a + ay) = 0$. Оскільки y довільне при цьому $f(-1) \neq 0$, ми одержимо суперечність, бо існує $y : a + ay = -1$. Таким чином для кожного $x \neq 0$ $f(x) \neq 0$, тому $f(x^2) \neq 0$. Але тоді з рівності $f(x^2)(f(x - 1) - (x - 1)) = 0$ ми маємо, що $f(x - 1) = x - 1$ для усіх $x \neq 0$ або $f(x) = x$ при $x \neq -1$. Оскільки відомо раніше, що $f(-1) = -1$ ми маємо, що другим розв'язком є функція $f(x) = x$.

2. Для додатних чисел x, y, z, що задовольняють умову $xyz = 1$, довести нерівність:

$$\frac{x^3 + y^3}{x^2 + xy + y^2} + \frac{x^3 + z^3}{x^2 + xz + z^2} + \frac{z^3 + y^3}{z^2 + zy + y^2} \geq 2.$$

<u>Розв'язання.</u> Побачимо, що $\frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + xy + y^2} \geq \frac{1}{3}$, оскільки це рівносильне нерівності $3(x^2 - xy + y^2) \geq x^2 + xy + y^2 \Leftrightarrow 2(x - y)^2 \geq 0$. Тоді ліву частину вихідної нерівності можна записати у вигляді: $\frac{x^3+y^3}{x^2+xy+y^2} + \ldots = \frac{x^2-xy+y^2}{x^2+xy+y^2}(x + y) + \ldots \geq \frac{1}{3}((x + y) + (x + z) + (z + y)) = \frac{2}{3}(x + y + z) \geq 2\sqrt[3]{xyz} = 2$.

3. Нехай P – деяка точка всередині квадрата $ABCD$. Знайти найменше дійсне число $a > 1$, для якого відношення площ деяких з двох з чотирьох трикутників PAB, PBC, PCD, PDA належить проміжку $\left[\frac{1}{a}, a\right]$.



<u>Рис.G-020</u>

<u>Відповідь:</u> $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ – золотий переріз.

<u>Розв'язання.</u> Спочатку покажемо, що завжди будуть існувати два трикутники, відношення площ яких лежить у проміжку $\left[\frac{1}{\varphi}, \varphi\right]$. Без обмеження загальності можемо вважати, що квадрат має площу 2. Тоді $S(PAB) + S(PCD) = 1 = S(PBC) + S(PAD)$. Покладемо $S(PAB) = x$, тоді $S(PCD) = 1 - x$, знову нехай $x \geq 1 - x \geq \frac{1}{2}$. Так само, нехай $S(PBC) = y \geq 1 - y = S(PAD)$, і остаточно нехай $x \leq y$. Зрозуміло, що $\frac{1}{2} \leq x < 1$. Розглянемо випадки по величині x.

1 випадок. $x \leq \frac{1}{\varphi}$, тоді $1 - x \geq 1 - \frac{1}{\varphi} > 0 \Rightarrow \frac{x}{1-x} \leq \frac{\frac{1}{\varphi}}{1-\frac{1}{\varphi}} = \frac{1}{\varphi - 1} = \frac{1}{\frac{1}{\varphi}} = \varphi$, з добре відомого співвідношення $\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$. Крім того, $x \geq 1 - x \Rightarrow \frac{x}{1-x} \geq 1 \geq \frac{1}{\varphi}$. Умова виконується.

2 випадок. $x > \frac{1}{\varphi} \Rightarrow \frac{1}{\varphi} < x \le y < 1 \Rightarrow 1 \le \frac{y}{x} < \frac{1}{\frac{1}{\varphi}} = \varphi$.

Тепер покажемо, що це – найменше значення для a. Легко зрозуміло, що для довільних $x, y \in (0,1)$ існує точка P всередині квадрату, для якої $S(PAB) = x$, $S(PCD) = 1 - x$, $S(PBC) = y$ та $S(PAD) = 1 - y$. Треба просто взяти точку P на відстані $x\sqrt{2}$ від сторони AB та на відстані $y\sqrt{2}$ від сторони BC.

Виберемо $x = \frac{1}{\varphi}$ та обчислюємо границю при $y \to 0$. Тоді найменше відношення площ, яке більше від 1, дорівнює $\frac{S(PDA)}{S(PBA)} = (1 - y)\varphi$, яка досягає φ при $y \to 0$. Аналогічно, найбільше відношення, що менше 1 дорівнює $\frac{S(PBA)}{S(PDA)} = \frac{1}{(1-y)\varphi} \to \frac{1}{\varphi}$, тобто значення $a = \varphi$.

4. Точки X, X_1, X_2 відмічені на сторонах AB, AC, BC відповідно трикутника ABC таким чином, що $XX_1 \perp AC$, $X_1X_2 \perp BC$, $X_2X \perp BA$. Нехай Y, Y_1, Y_2 точки на сторонах BC, AC, AB відповідно такі, що $YY_1 \perp AC$, $Y_1Y_2 \perp AB$. Довести, що $Y_2Y \perp BC$, якщо $XY \parallel AC$.

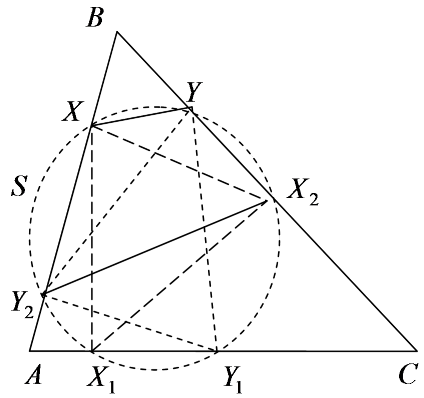


Рис.G-033

Розв'язання. Нехай $XY \parallel AC$, тоді $\angle YXX_1 = \angle XX_1Y_1 = 90°$, оскільки за умовою $\angle X_1X_2Y = 90°$, то точки X, X_1, X_2, Y лежать на деякому колі S. Так само очевидно, що $Y_1 \in S$. Оскільки $\angle X_2XY_2 = 90° \Rightarrow X_2Y_2$ – діаметр цього кола. Тому $\angle X_2YY_2 = 90° \Rightarrow Y_2Y \perp BC$.

5. Нехай p – многочлен з цілими коефіцієнтами, у якого $p(0) = p(1) = 1$. Визначимо послідовність $a_0, a_1, \ldots$ таким чином: a_0 – довільне ціле число, і для кожного натурального n $a_n = p(a_{n-1})$. Довести, що усі члени послідовності $a_0, a_1, \ldots$ – взаємно прості числа.

Розв'язання. З умов задачі випливає, що многочлен можна подати у вигляді $p(x) = x(x-1)g(x) + 1$. Тоді $a_1 = p(a_0) = a_0(a_0 - 1)g(a_0) + 1 = k_1a_0 + 1$, звідки випливає той факт, що a_1 взаємно просте з a_0. Крім того $a_1 - 1 = a_0(a_0 - 1)g(a_0)$.

Далі маємо $a_2 = p(a_1) = a_1(a_1 - 1)g(a_1) + 1 = a_1a_0(a_0 - 1)g(a_0)g(a_1) + 1 = a_0a_1k_1 + 1$, звідки випливає, що це число є взаємно простим з a_0, a_1.

Далі за індукцією, нехай $a_n = k_na_0a_1 \ldots a_{n-1} + 1$, тоді $a_{n+1} = p(a_n) = a_n(a_n - 1)g(a_n) + 1 = k_{n+1}a_0a_1 \ldots a_{n-1}a_n + 1$, що й треба було ждовести.

6. Перші 2010 натуральних чисел записали у довільному порядку у вигляді послідовності. Після цього утворили нову послідовність, яка одержана додаванням до члена першої послідовності його номера у цій послідовності (номери – це натуральні числа від 1 до 2010). Довести, що у новій послідовності є принаймні два члени, різниця яких ділиться на 2010.

Розв'язання. Позначимо члени другої послідовності (s_k), $k = \overline{1, 2010}$. Припустимо супротивне, тобто серед них немає двох, різниця яких кратна 2010, тоді вони усі дають різні остачі при діленні на 2010, позначимо ці остачі (r_k), $k = \overline{1, 2010}$, це є просто деяка перестановка чисел $0, 1, 2, \ldots, 2009$. Сума цих остач рівна $R = 0 + 1 + 2 + \ldots + 2009 = 1005 \cdot 2009$. З іншого боку $S = s_1 + s_2 + \ldots + s_{2010} = 2010 \cdot 2011$. За умовою різниця між цими сумами та їх остачами ділиться на 2010. Але це означає, що й така різниця $S - R = \sum\limits_{k=1}^{2010} s_k - \sum\limits_{k=1}^{2010} r_k = \sum\limits_{k=1}^{2010} (s_k - r_k) \vdots 2010$, але обчислена різниця не ділиться на 2010, бо $S - R = 2010 \cdot 2011 - 1005 \cdot 2009 \not\vdots 2010$. Одержана суперечність показує, що наше припущення хибне, це й завершує наше доведення.

7. Про учнів 9А класу та 9Б класу, в яких навчаються відповідно 30 та 28 учнів, відомо, що кожен учень 9А класу товаришує не менше ніж з половиною учнів 9Б класу, а кожен учень 9Б товаришує не більше ніж з половиною учнів 9А класу. У кого більше товаришів серед учнів протилежного класу – у Петрова з 9А класу чи у Петренка з 9Б класу?

Відповідь: у Петренка.

Розв'язання. Покажемо, що з умов задачі випливає, що кожен учень кожного класу товаришує з половиною учнів протилежного класу. Загальну кількість пар товаришів X можна оцінити таким чином: виходячи з умов для 9А класу $X \geq 30 \cdot 14 = 420$, а з умов на 9Б клас маємо, що $X \leq 28 \cdot 15 = 420$. Звідси маємо, що $X = 420$ і кожен товаришує рівно з половиною заданих учнів. Таким чином у Петрова 14 товаришів у 9Б класі, а у Петренка – 15 у 9А класі.

Приклад, що така ситуація можлива – очевидний, достатньо щоб у класах товаришували верхні та нижні половини класів відповыдно.

8. Є купа, що складається з N камінців, де N кратне 3. Леся та Андрійко грають у таку гру – спочатку Леся розбиває купу на свій вибір на 2 (якщо це можливо) або на 3 рівні (за кількістю камінців) купки. Далі Андрійко обирає будь-яку купку і ділить її на свій розсуд на 2 чи 3 рівні купки, якщо це можливо. Далі знову Леся розбиває деяку купку на 2 чи 3 рівні купки, якщо це можливо і т.д. до тих пір, коли вже жодну купку не можна далі розбити на 2 чи 3 рівні купки. Перемагає той, хто розіб'є останню купку. При яких значеннях N перемагає Леся?

Відповідь: Леся виграє при парному N або при $N = 3^k \cdot m$, де k, m – непарні числа, і m не кратне 3.

Розв'язання. При парному N перемагає симетрична стратегія, тобто Леся ділить купу навпіл і далі просто повторює ходи Андрійка.

Нехай тепер $N = 3^k \cdot m$, де m – непарне число та не кратне 3. Тепер усі ходи Лесі та Андрійка строго визначені та ні на що не впливають, при діленні будь-якої купки на 3 рівні частини (у купок з парною кількістю камінців не було і вони не можуть з'явитись при діленні на 3 рівні частини деякої купки з непарною кількістю камінців) кількість купок збільшується на 2. Оскільки спочатку була 1 купка, а наприкінці буде 3^k купок, у кожній з яких буде рівно по m камінців. Усього було зроблене рівно $P = \frac{1}{2}(3^k - 1)$ ходів. Леся, що починала гру, виграє при непарному P, а Андрійко – при парному.

При парному $k = 2s$ маємо $P = \frac{1}{2}(3^{2s} - 1) = \frac{1}{2}(3^s - 1)(3^s + 1)$, оскільки кожний множник – парний, то й добуток буде парним, тому виграє Андрійко.

При непарному $k = 2s + 1$ маємо $P = \frac{1}{2}(3^{2s+1} - 1) = \frac{1}{2}(3^{2s} - 1) + 3^{2s}$ – сума парного та непарного доданків, то й сума буде непарною, тому виграє Леся.

Математичний бій № 1

Старша ліга

Група Б

Умови та розв'язки

1. Задача № 1 старша ліга група "А"

2. Доведіть, що якщо існує трикутник зі сторонами a, b, c, тоді існує також і трикутник зі сторонами $\frac{a}{a+1}, \frac{b}{b+1}, \frac{c}{c+1}$.

Розв'язання. Розглянемо різницю

$$\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} - \frac{c}{c+1} = \frac{a(b+1)(c+1) + b(a+1)(c+1) - c(a+1)(b+1)}{(a+1)(b+1)(c+1)} =$$

$$= \frac{abc + 2ab + a + b - c}{(a+1)(b+1)(c+1)} > \frac{abc + 2ab}{(a+1)(b+1)(c+1)} > 0,$$

що й треба було довести. Внаслідок довільності вибору сторін вказаний трикутник існує.

3. У рівносторонньому трикутнику ABC на стороні BC обрана точка $D \neq B, C$ і побудовано коло таким чином, що воно дотикається сторони BC у точці D та перетинає сторону AB у точках M, N, а сторону AC у точках P, Q відповідно. довести, що $BD + AM + AN = CD + AP + AQ$.

Розв'язання. Позначимо довжину сторони заданого правильного трикутника ABC через d. З властивостей січних та дотичних до кола (або степені точки відносно кола) можемо записати такі рівності: $BD^2 = BM \cdot BN = (d - AM)(d - AN) = d^2 - d(AM + AN) + AM \cdot AN$.

Аналогічно $CD^2 = d^2 - d(AQ + AP) + AQ \cdot AP$. Оскільки $CD = d - BD$, то $CD^2 = d^2 - d(AQ + AP) + AQ \cdot AP = d^2 - 2d \cdot BD + BD^2 = d^2 - 2d \cdot BD + d^2 - d(AM + AN) + AM \cdot AN$. Оскільки $AQ \cdot AP = AM \cdot AN$, то $d(AQ + AP) = 2d \cdot BD - d^2 + d(AN + AM)$, після скорочення на d та з використання формули $2BD - d = BD + (BD - d) = BD - CD$ одержуємо потрібну рівність.

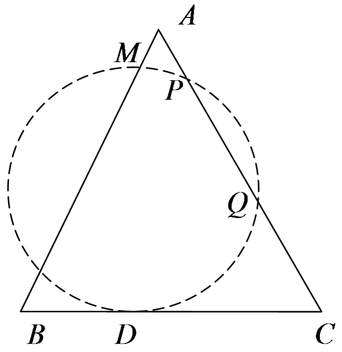


Рис.G-057

4. Задача № 4 старша ліга група "А"

5. Задача № 5 старша ліга група "А"

6. Задача № 6 старша ліга група "А"

7. У деякій школі є три восьмих класи: 8А, 8Б та 8В, у кожному з яких навчається парна кількість учнів.

а) Відомо, що кожний учень кожного з класів товаришує більше ніж із половиною учнів кожного з інших класів. Чи обов'язково завжди знайдуться 3 учні по одному з кожного класу, які товаришують між собою?

б) Чи залишиться правильним це твердження, якщо кожен товаришує рівно з половиною учнів з кожного з інших класів?

Відповідь: а) так; б) ні.

Розв'язання. а) Виберемо довільного учня X з 8А класу. Позначимо через M та N множину його знайомих у 8Б та 8В відповідно. Виберемо довільного представника Y з множини M. Якщо його усіх його товаришів з 8В класу позначити через K, то множини N та K перетинаються, бо кожна з них містить більше половини учнів 8В. Будь-який учень Z з цього перетину разом з учнями X та Y складає шукану трійку.

б) Не обов'язково. Наприклад, у кожному класі по 2 учні А1, А2, Б1, Б2, В1, В2, і знайомі проміж собою такі пари: А1-Б1-В2-А2-Б1-В1-А1 (позначені сусіди, що товаришують), легко зрозуміло, що тут немає жодного трикутника знайомих, а тому й твердження не вірне. Для більшої кількості учнів у кожному класі можна побудувати аналогічні приклади.

8. Задача № 8 старша ліга група "А"

Математичний бій № 1

Старша ліга

Група B

Умови та розв'язки

1. Розв'язати у додатних числах систему рівнянь $\begin{cases} x + \frac{1}{yz} + z^2 = 3, \\ y + \frac{1}{xz} = 2. \end{cases}$

Відповідь: $x = y = z = 1$.

Розв'язання. З нерівності між середніми для трьох та двох чисел маємо:

$$3 = x + \frac{1}{yz} + z^2 \geq 3 \cdot \sqrt[3]{x \cdot \frac{1}{yz} \cdot z^2} = 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{xz}{y}},$$

$$2 = y + \frac{1}{xz} \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{y}{xz}}.$$

З першої нерівності випливає, що $\frac{xz}{y} \leq 1$, а з другої – $\frac{xz}{y} \geq 1$, тобто $y = zx$, а тоді з другого рівняння маємо, що $y + \frac{1}{y} = 2$, тобто $y = 1$.

Оскільки у першій нерівності виконується рівність, то так само повинні виконуватись і такі рівності: $x = \frac{1}{yz} = x^2$, звідки остаточно й одержимо наведену відповідь.

2. Нехай для чисел a, b виконується рівність: $\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}=6$. Яких значень може набувати вираз $\frac{a^3+b^3}{a^3-b^3}+\frac{a^3-b^3}{a^3+b^3}$?

Відповідь: $\frac{18}{7}$.

Розв'язання. Оскільки з умови випливає, що $6=\frac{2a^2+2b^2}{a^2-b^2}$, тому $a^2=2b^2$, звідки й маємо, що

$$\frac{a^3+b^3}{a^3-b^3}+\frac{a^3-b^3}{a^3+b^3}=\frac{2a^6+2b^6}{a^6-b^6}=\frac{18}{7}.$$

3. Задача № 3 старша ліга група "Б"

4. Задача № 4 старша ліга група "А"

5. Знайти усі цілі k такі, що для кожного цілого n числа $(4n+1)$ та $(kn+1)$ є взаємно простими.

Відповідь: $k=4\pm 2^m$, $m\in\mathbb{Z}^+$.

Розв'язання. Оскільки $4n+1$ непарне, то з рівності $k-4=k(4n+1)-4(kn+1)$ маємо, що числа $4n+1$ та $kn+1$ є взаємно простими, то $k-4$ не має непарних дільників. Тобто $k-4=\pm 2^m$ для деякого цілого невід'ємного m.

З іншого боку, якщо $k-4$ має непарний дільник $p>1$, то ми можемо легко знайти множник для p такий, щоб добуток мав форму $4n+1$. Тоді для такого множника $p|(kn+1)$, тобто ці числа не є взаємно простими.

Перевіркою переконуємось, що відповідь задовольняє умову задачі.

6. Знайти усі натуральні n, для яких число $\sqrt{\frac{9n-1}{n+7}}$ є раціональним.

Відповідь: 1 та 11.

Розв'язання. Нехай $\frac{9n-1}{n+7}=\frac{a^2}{b^2}$, де натуральні числа a, b взаємно прості. Визначимо звідси n: $n=\frac{7a^2+b^2}{9b^2-a^2}=-7+\frac{64b^2}{9b^2-a^2}$, оскільки $(a,b)=1\Rightarrow(a^2,b^2)=1\Rightarrow(9b^2-a^2,b^2)=1$, тому з попередньої формули число n – натуральне тільки тоді, коли $9b^2-a^2=(3b-a)(3b+a)$ є дільником 64, тобто залишається перебрати відповідні випадки. Два наведені множники однієї парності, крім того $3b+a>3b-a$, а також для того, щоб $n>0$ треба $9b^2-a^2\geq 8$, що дозволяє зменшити подальший перебір варіантів.

1) $3b-a=2$, тоді можливі такі варіанти:

$3b+a=4\Rightarrow a=1$, $b=1\Rightarrow n=1$ – розв'язок;

$3b+a=8\Rightarrow b=\frac{5}{3}$ – не задовольняє умови;

$3b+a=16\Rightarrow a=7$, $b=3\Rightarrow n=11$ – розв'язок;

$3b+a=32\Rightarrow b=\frac{17}{3}$ – не задовольняє умови;

2) $3b-a=4$, тоді можливі такі варіанти:

$3b+a=8\Rightarrow a=2$, $b=2$ – не задовольняє умови, бо дріб скоротний;

$3b+a=16\Rightarrow b=\frac{10}{3}$ – не задовольняє умови;

7. У деякій школі є три восьмих класи: 8А, 8Б та 8В, у кожному з яких навчається парна кількість учнів. Відомо, що кожний учень кожного з класів товаришує рівно з половиною учнів кожного з інших класів. Чи обов'язково завжди знайдуться 3 учні по одному з кожного класу, які товаришують між собою?

Відповідь: ні.

Розв'язання. Дивись розв'язання пункту б) задачі 7 старша ліга група "Б".

8. Задача № 8 старша ліга група "А"

Математичний бій № 1

Середня ліга

Група А

Умови та розв'язки

1. Задача № 1 старша ліга група "В"

2. Задача № 2 старша ліга група "А"

3. Задача № 3 старша ліга група "Б"

4. Задача № 4 старша ліга група "А"

5. Задача № 5 старша ліга група "А"

6. Задача № 6 старша ліга група "В"

7. Задача № 7 старша ліга група "А"

8. Є купа, що складається з 3^k камінців. Леся та Андрійко грають у таку гру. Спочатку Леся розбиває купу на 3 рівні (за кількістю камінців) купки. Далі Андрійко обирає будь-яку купку і ділить її на 3 рівні купки, якщо це можливо. Далі знову Леся розбиває деяку купку на 3 рівні купки, якщо це можливо і т.д. доти, доки вже у кожній купі не залишиться рівно по 1 камінцю. Перемагає той, хто розіб'є останню купку. При яких значеннях k перемагає Леся?

Відповідь: Леся виграє при непарному k.

Розв'язання. Усі ходи Лесі та Андрійка строго визначені та ні на що не впливають, при діленні будь-якої купки на 3 рівні частини кількість купок збільшується на 2. Оскільки спочатку була 1 купка, а наприкінці буде 3^k купок, у кожній з яких буде рівно по 1 камінцю. Усього було зроблене рівно $P = \frac{1}{2}(3^k - 1)$ ходів. Леся, що починала гру, виграє при непарному P, а Андрійко – при парному.

При парному $k = 2s$ маємо $P = \frac{1}{2}(3^{2s} - 1) = \frac{1}{2}(3^s - 1)(3^s + 1)$, оскільки кожний множник – парний, то й добуток буде парним, тому виграє Андрійко.

При непарному $k = 2s + 1$ маємо $P = \frac{1}{2}(3^{2s+1} - 1) = \frac{1}{2}(3^{2s} - 1) + 3^{2s}$ – сума парного та непарного доданків, то й сума буде непарною, тому виграє Леся.

Математичний бій № 1

Середня ліга

Група Б

Умови та розв'язки

1. Задача № 1 старша ліга група "В"

2. Задача № 2 старша ліга група "Б"

3. У прямокутному трикутнику ABC відмічена точка K – середина гіпотенузи AB, на катеті BC обрана точка M таким чином, що $BM = 2MC$. Довести, що $\angle MAB = \angle MKC$.

Розв'язання. Розглянемо точку N – середину відрізку BM, тоді з рівності відрізків $CK = BK$ маємо рівність кутів $\angle BCK = \angle CBK$, оскільки $KN \parallel AM$ як середня лінія, то $\angle NKB = \angle MAB$, тому $\triangle CMK = \triangle BNK$, тому й $\angle MKC = \angle NKB = \angle MAB$, що й треба було довести.

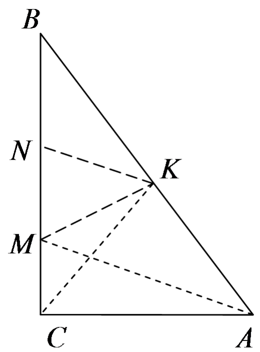


Рис.111

4. Задача № 4 старша ліга група "А"

5. Задача № 5 старша ліга група "В"

6. Задача № 6 старша ліга група "В"

7. Задача № 7 старша ліга група "В"

8. Задача № 8 середня ліга група "А"

Математичний бій № 1

Молодша ліга

Група А

Умови та розв'язки

1. На дошці записаний вираз $1*2*3*4*5*6$, у якому довільним чином замість зірочок розставили знаки плюс та мінус. Дозволяється за один хід поміняти будь-які два знаки на протилежні. Чи завжди можна за скінченну кількість кроків одержати вираз, значення якого є цілим числом, що кратне 7?

Відповідь: Так, завжди.

Розв'язання. Якщо у виразі парна кількість мінусів, то ми можемо одержати число $1+2+3+4+5+6=21$, яке задовольняє умову.

Якщо там непарна кількість мінусів, то зробимо, що мінус був єдиний і щоб він був розташований перед числом 3, а далі зробимо мінуси перед числами 5 та 6 і будемо мати вираз: $1+2-3+4-5-6=-7$ – також кратне 7.

2. Задача № 2 старша ліга група "В"

3. Задача № 3 середня ліга група "Б"

4. Прямокутний листок паперу розміру $m \times n$ було розрізано на квадрати та на прямокутні рівнобедрені трикутники з виконанням таких умов:

1) усі квадрати рівні між собою, усі трикутники також рівні між собою;

2) діагональ квадрата дорівнює катету прямокутного трикутника і дорівнює подвоєній стороні клітини паперу;

3) усі розрізи були зроблені вздовж сторін клітинок паперу або вздовж діагоналей клітинок.

Доведіть, що якщо при такому розбитті усі одержані квадратики замінити на прямокутні рівнобедрені трикутники, то з одержаного набору трикутників так само можна зібрати заданий прямокутник.

Розв'язання. Будемо вважати, що довжина сторони клітини 1. Виходячи з умов задачі, початкове розрізання прямокутника могло відбутися лише за умови, що до країв листка паперу прилягають лише трикутники, причому своїми катетами. Оскільки довжина катета дорівнює 2, то розміри прямокутника парні числа. Тому його можна розрізати на квадрати 2×2, кількість таких квадратів дорівнює $\frac{1}{4}mn$. Кожен такий квадрат можна розрізати на 2 трикутники, таким чином їх усього буде $\frac{1}{2}mn$. Неважко підрахувати, що і при початковому розбитті усього разом квадратів та трикутників стільки ж, бо площа кожної фігурки 2, а площа прямокутника mn. Тобто, якщо ці квадрати замінити на трикутники, то їх кількість буде $\frac{1}{2}mn$, і як ми бачимо ними можна замостити початковий прямокутник.

5. Задача № 5 старша ліга група "В"

6. Задача № 6 старша ліга група "А"

7. Задача № 7 старша ліга група "Б"

8. Задача № 8 середня ліга група "А"

Математичний бій № 1
Молодша ліга
Група Б
Умови та розв'язки

1. Задача № 1 молодша ліга група "А"

2. Задача № 2 старша ліга група "В"

3. Задача № 3 середня ліга група "Б"

4. Задача № 4 молодша ліга група "А"

5. Розв'язати у цілих числах рівняння: $3x^2-2y^2=1998$.

Відповідь: Розв'язків немає.

Розв'язання. З подільності на 3 маємо, що $y = 3a$, звідки $x^2 - 6a^2 = 666$, звідки $x = 3b$, далі аналогічно $a = 3c$, звідки $b^2 = 6c^2 + 74$. Остання рівність неможлива за модулем 3.

6. Задача № 6 старша ліга група "A"

7. У деякій школі є три восьмих класи: 8А, 8Б та 8В, у кожному з яких навчається парна кількість учнів. Відомо, що кожний учень кожного з класів товаришує більше ніж із половиною учнів кожного з інших класів. Чи обов'язково завжди знайдуться 3 учні, по одному з кожного класу, які товаришують між собою?

Відповідь: так.

Розв'язання. Дивись розв'язання пункту а) задачі 7 старша ліга група "Б".

8. Задача № 8 середня ліга група "A"