Домашнее задание 07.12.13

1 Старое.

1. Дано натуральное число $n > 2$. Докажите, что
$$(\phi(a^n - 1), n) > 1$$
.

2. Найдите все простые числа p, q такие, что
$$2p^q - q^p = 7$$

3. Докажите, что простых чисел вида $pk + 1$, где p — простое, бесконечно много.

2 Новое

1. Игра происходит на клетчатом поле 9×9. Играют двое, ходят по очереди, начинает первый. Он ставит в свободные клетки крестики, второй игрок — нолики. Когда все клетки заполнены, подсчитывается количество строк и столбцов, в которых крестиков больше, чем ноликов, — число K, и количество строк и столбцов, в которых ноликов больше, чем крестиков, — число H. Разность $K - H$ считается выигрышем первого. Найдите такое число B, для которого одновременно выполняются условия: первый игрок может себе обеспечить выигрыш не меньше B, а второй может всегда проиграть не больше B.

2. Двое по очереди красят стороны n-угольника. Первому разрешается красить сторону, у которой оба соседа покрашено или не покрашено ни одного, а второму можно покрасить сторону с ровно одним покрашеным соседом. Проигрывает тот, кому некуда ходить. Кто побеждает при правильной игре?

3. Дана таблица 2013×2013. Двое играют в такую игру: в свой ход первый красит незакрашенный до этого квадрат 2×2 в синий цвет, а второй красит незакрашенный до этого квадрат 1×1 в жёлтый цвет. Когда первый уже не может закрасить квадрат 2×2, второй закрашивает нетронутые клетки в жёлтый цвет, и на этом игра заканчивается. Если на доске синих клеток больше, чем жёлтых, то побеждает первый. Иначе побеждает второй. Кто выиграет при правильной игре?

4. Есть шоколадка в форме правильного треугольника со стороной n, разделённая бороздками на маленькие треугольники со стороной 1 (каждая сторона поделена на n частей, точки деления на каждой стороне соединены линиями, параллельными третьей стороне). Играют двое. За ход можно отламать от шоколадки треугольный кусок (вдоль какой-нибудь бороздки), съесть его и передать остаток противнику. Тот, кто не может сделать ход, досрочно проигрывает. Тот, кто получит последний кусок - треугольничек со стороной 1, — победитель. Для каждого n выясните, кто из играющих всегда может победить, как бы не играл противник?

5. Первый игрок задумал целое число, большее 100. Второй игрок называет целое число $d > 1$. Если число первого делится на d, то второй выиграл, иначе первый отнимает от задуманого числа d и игра продолжается. Называть числа, уже названные запрещается. Когда число первого станет отрицательным, второй проигрывает. Может ли второй действовать таким образом, чтоб гарантировано выиграть?