Геометрія-1. Кути

«Якщо ви хочете нвчитися плавати, то сміливо заходьте у воду, а якщо хочете навчитися розв'язувати задачі, то розв'язуйте їх.»

Д.Пойа

1. AH_1, BH_2, CH_3 — висоти трикутника ABC, H — його ортоцентр, O — центр описаного кола трикутника ABC, M — середина BC. Довести, що
   (a) точка, симетрична H відносно точки M, лежить на описаному колі трикутника ABC;
   (b) $OA \perp H_2H_3$;
   (c) $AH = 2OM$;
   (d) радіуси кіл, описаних навколо трикутників ABC, AHB, BHC, AHC, рівні.
2. AA_1, BB_1 — медіани трикутника ABC. Відомо, що $\angle CAA_1 = \angle CBB_1$. Довести, що трикутник ABC — рівнобедрений.
3. Через точку A трикутника ABC провели дотичну до описаного кола $\triangle ABC$, яка перетнула BC в точці E. Нехай AD — бісектриса $\triangle ABC$. Довести, що $AE = ED$.
4. M — середина дуги AB деякого кола. На хорді AB обрано довільним чином точки K і E. Прямі ME і MK перетинають коло в точках C і D відповідно. Довести, що чотирикутник $KECD$ — вписаний.
5. Продовження бісектрис гострокутного трикутника перетинають описане коло цього трикутника в точках A_1, B_1, C_1. Тоді висоти трикутника $A_1B_1C_1$ лежать на прямих AA_1, BB_1, CC_1.
6. На сторонах BC і CD прямокутника $ABCD$ взято точки P і Q так, що $\triangle APQ$ правильний. Нехай P' і Q' — середини AP і AQ. Довести, що трикутники $BQ'C$ і $CP'D$ — правильні.
7. B_1, C_1 — точки дотику вписаного кола $\triangle ABC$ до AC і AB відповідно, I — інцентр. BI перетинає B_1C_1 в точці P. Довести, що $\angle BPC = 90°$.
8. У трикутнику один з кутів дорівнює $120°$. Довести, що трикутник, утворений основами його бісектрис, — прямокутний.
9. У гострокутному трикутнику ABC відомо, що $AB = CH$, де H — ортоцентр. Знайти кут C.